

Correction de l'interrogation 1 d'entraînement Logique et raisonnement

1. Restituer le cours.

1.1 Soient P et Q deux assertions. On a

$$\overline{P \text{ ET } Q} \Leftrightarrow \overline{P} \text{ OU } \overline{Q}$$

et

$$\overline{P \text{ OU } Q} \Leftrightarrow \overline{P} \text{ ET } \overline{Q}$$

1.2 Soient P et Q deux assertions. L'implication $P \Rightarrow Q$ est donnée par

$$\overline{P} \text{ OU } Q.$$

1.3 Soient P et Q deux assertions et I l'implication $P \Rightarrow Q$. Sa réciproque est donnée par

$$Q \Rightarrow P,$$

sa contraposée est donnée par

$$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P},$$

sa négation est donnée par

$$P \text{ ET } \overline{Q}.$$

Manipuler les implications et équivalences.

$$1.4 \Leftarrow$$

$$1.5 \Leftrightarrow$$

$$1.6 \Leftrightarrow$$

$$1.7 \Rightarrow$$

$$1.8 \Leftarrow$$

$$1.9 \Leftarrow$$

$$1.10 \times$$

$$1.11 \times$$

$$1.12 \Leftarrow$$

$$1.13 \Rightarrow$$

2. Réciproque/contraposée/négation.

2.1 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La réciproque est

$$\cos(x) = \cos(y) \Rightarrow \frac{x - y}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

La contraposée est

$$\cos(x) \neq \cos(y) \Rightarrow \frac{x - y}{2\pi} \notin \mathbb{Z}.$$

La négation est

$$\frac{x - y}{2\pi} \in \mathbb{Z} \text{ ET } \cos(x) \neq \cos(y).$$

2.2 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La réciproque est

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ \Rightarrow & (f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

La contraposée est

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R} \\ \Rightarrow (f \text{ n'est pas croissante sur } \mathbb{R}) \text{ OU } (f \text{ n'est pas majorée sur } \mathbb{R}).$$

La négation est

$$(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \text{ ET } (f \text{ est majorée sur } \mathbb{R}) \\ \text{ET } \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ n'existe pas dans } \mathbb{R} \right).$$

2.3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La réciproque est

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

La contraposée est

$$(\forall (m, M) \in \mathbb{R}^2, \exists n \in \mathbb{N}, u_n < m \text{ OU } u_n > M) \Rightarrow (u_n) \text{ diverge.}$$

La négation est

$$(u_n) \text{ converge ET } (\forall (m, M) \in \mathbb{R}^2, \exists n \in \mathbb{N}, u_n < m \text{ OU } u_n > M)$$

2.4 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$. La réciproque est

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq a \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > a.$$

La contraposée est

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < a \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq a.$$

La négation est

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > a \text{ ET } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < a.$$

2.5 Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La réciproque est

$$[\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)] \\ \Rightarrow [\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))].$$

La contraposée est

$$[\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \text{ tel que } f(x) = f(y)] \\ \Rightarrow [\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \text{ tel que } f(x) \geq f(y)].$$

La négation est

$$[\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))] \\ \text{ET } [\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \text{ tel que } f(x) = f(y)].$$

3. Quantificateurs.

3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'assertion est

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n) \text{ OU } (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n).$$

La négation est

$$(\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n) \text{ ET } (\exists m \in \mathbb{N}, u_{m+1} > u_m).$$

3.2 L'assertion est

$$(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)) \\ \text{ET } (\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_-)^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$$

La négation est donc,

$$(\exists (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x \leq y, f(x) > f(y)) \\ \text{OU } (\exists (x, y) \in (\mathbb{R}_-)^2, x < y, f(x) \leq f(y)).$$

3.3 L'assertion est

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \pi \neq \frac{p}{q}.$$

La négation est

$$\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \pi = \frac{p}{q}.$$

3.4 Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'assertion est

$$\forall f \in \mathcal{E}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$$

La négation est

$$\exists f \in \mathcal{E}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0.$$

3.5 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{Z}.$$

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \notin \mathbb{Z}.$$

4. Récurrence.

4.1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Si $n = 1$, alors $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Si $n = 1$, alors $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(2n^2 + n + 6n + 6)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Initialisation. Si $n = 0$, alors $\frac{1-x}{1-x} = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$. Puisque $P(n)$ est vraie, on a $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

4.4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = \frac{5^n-1}{2}$.

Initialisation. Si $n = 0$, alors $\frac{5^0-1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons $P(n)$. Alors $u_n = \frac{5^n-1}{2}$. Montrons $P(n+1)$. Par définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n + 2 = 5 \frac{5^n-1}{2} + 2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{5^{n+1} - 5 + 4}{2} \\ &= \frac{5^{n+1} - 1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5^n-1}{2}.$$

4.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = 4^n - (-2)^n$. Procédons à une récurrence double.

Initialisation. Si $n = 0$, alors $4^0 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Si $n = 1$, alors $4^1 - (-2)^1 = 4 - (-2) = 6 = u_1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(P(n) \text{ ET } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors $u_n = 4^n - (-2)^n$ et $u_{n+1} = 4^{n+1} - (-2)^{n+1}$. Par définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 8u_n \\ &= 2(4^{n+1} - (-2)^{n+1}) + 8(4^n - (-2)^n) \\ &\quad \text{par les hypothèses de récurrence} \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4 \times 4^n - (-4)(-2)(-2)^n \\ &= 2 \times 4^{n+1} - 2 \times (-2)^{n+1} + 2 \times 4^{n+1} - (-4)(-2)^{n+1} \\ &= 4^{n+1}(2+2) - (-2)^{n+1}(2-4) \\ &= 4^{n+2} - (-2)^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est aussi vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4^n - (-2)^n.$$

4.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2}{n+1}$. On commence par calculer les premiers termes. On a

$$u_1 = \frac{u_0^2}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Puis,

$$u_2 = \frac{u_0^2 + u_1^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Et encore,

$$u_3 = \frac{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2}{3} = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

On conjecture alors le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1.$$

Procédons à une récurrence forte. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n = 1$.

Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = 1$ par hypothèse. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\forall k \leq n, P(k)) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(k)$ est vraie. Alors pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $u_k = 1$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de la suite, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2}{n+1} = \frac{1+1+\dots+1}{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

Donc $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ et $P(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1.}$$

5. **Calcul dans $\mathbb{R}$.** Je vous présente pour chaque question deux méthodes de résolution. Par analyse-synthèse ou directement par équivalences. N'hésitez pas à vous entraîner sur les deux.

5.1 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} = x + 2 &\Rightarrow x^2 - 1 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 \\ &\Rightarrow 4x = -5 \\ &\Rightarrow x = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = -\frac{5}{4}$, on a $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ et $x + 2 = -\frac{5}{4} + 2 = \frac{3}{4}$ donc $-\frac{5}{4}$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2 - 1} = x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - 1} = x + 2 \\ \Leftrightarrow &x^2 - 1 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 \text{ ET } x^2 - 1 \geq 0 \text{ ET } x + 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &4x = -5 \text{ ET } x^2 \geq 1 \text{ ET } x \geq -2 \\ \Leftrightarrow &x = -\frac{5}{4} \text{ ET } x^2 \geq 1 \text{ ET } x \geq -2 \\ \Leftrightarrow &x = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x^2 - 1} = x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.}$$

5.2 **Par analyse-synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 1} = \sqrt{2x + 1} &\Rightarrow x - 1 = 2x + 1 \\ &\Rightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = -2$, on a $\sqrt{x - 1} = \sqrt{-3}$ n'existe pas !

Conclusion, cette équation n'admet aucune solution.

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} &= \sqrt{2x+1} &\Leftrightarrow & x-1 = 2x+1 \text{ ET } x-1 \geq 0 \text{ ET } 2x+1 \geq 0 \\ & &\Leftrightarrow & x = -2 \text{ ET } x \geq 1 \text{ ET } x \geq -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion, cette équation n'admet aucune solution.

5.3 Par analyse-synthèse : soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5} &= \sqrt{2x+2} \Rightarrow x+5 = 2x+2 \\ &\Rightarrow x = 3.\end{aligned}$$

Synthèse : de plus si $x = 3$, on a $\sqrt{x+5} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2x+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Donc $x = 3$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2} \Leftrightarrow x = 3.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5} &= \sqrt{2x+2} &\Leftrightarrow & x+5 = 2x+2 \text{ ET } x+5 \geq 0 \text{ ET } 2x+2 \geq 0 \\ & &\Leftrightarrow & x = 3 \text{ ET } x \geq -5 \text{ ET } x \geq -1 \\ & &\Leftrightarrow & x = 3.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2} \Leftrightarrow x = 3.}$$

5.4 Par analyse-synthèse : soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3} &= x+1 \Rightarrow 2x^2-x-3 = x^2+2x+1 \\ &\Rightarrow x^2-3x-4 = 0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc $x = \frac{3+5}{2} = 4$ ou $x = \frac{3-5}{2} = -1$. Synthèse : si $x = 4$, on a $\sqrt{2x^2-x-3} = \sqrt{32-4-3} = 5 = x+1$ Donc $x = 4$ est une solution. Si $x = -1$, alors $\sqrt{2x^2-x-3} = \sqrt{2+1-3} = 0 = -1+1$ Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2-x-3} = x+1 \Leftrightarrow x = 4 \text{ OU } x = -1.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3} &= x+1 \\ \Leftrightarrow 2x^2-x-3 &= x^2+2x+1 \text{ ET } 2x^2-x-3 \geq 0 \text{ ET } x+1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2-3x-4 &= 0 \text{ ET } 2x^2-x-3 \geq 0 \text{ ET } x \geq -1.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2-3x-4 = 0$, on a $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{3+5}{2} = 4$ et $\frac{3-5}{2} = -1$. De plus, si Δ' le discriminant de $2x^2-x-3$, $\Delta' = 1 + 24 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{1+5}{4} = -1$ et $\frac{1-5}{4} = \frac{3}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-x-3} &= x+1 \\ \Leftrightarrow (x = -1 \text{ OU } x = 4) &\text{ ET } \left(x \leq -1 \text{ OU } x \geq \frac{3}{2}\right) \text{ ET } x \geq -1 \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ OU } x = 4\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2-x-3} = x+1 \Leftrightarrow x = 4 \text{ OU } x = -1.}$$

5.5 Par analyse-synthèse : soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}x &= -1 + \sqrt{x^2-2} \Rightarrow x+1 = \sqrt{x^2-2} \\ &\Rightarrow x^2+2x+1 = x^2-2 \\ &\Rightarrow x = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Synthèse : si $x = -\frac{3}{2}$, on a $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = 1 + x$ Donc $x = -\frac{3}{2}$ n'est pas solution.
Conclusion,

$$x = -1 + \sqrt{x^2 - 2} \text{ n'admet aucune solution.}$$

Par équivalences : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x = -1 + \sqrt{x^2 - 2} &\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2 \text{ ET } x + 1 \geq 0 \text{ ET } x^2 - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ET } x \geq -1 \text{ ET } x^2 \geq 2, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Conclusion,

$$x = -1 + \sqrt{x^2 - 2} \text{ n'admet aucune solution.}$$