

Interrogation 3 d'entraînement Bijections

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
- 1.2 Définir une fonction injective, surjective, bijective.
- 1.3 Énoncer le théorème de la bijection.
- 1.4 Énoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
- 1.5 Définir la négligeabilité entre deux fonctions.

2. Ensemble image, image réciproque, injection, surjection, bijection.

- 2.1 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2 + 2x + 1 \end{cases}$. Déterminer $f([-1; 6])$ et $f^{-1}([-1; 1])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.2 Soit $f : \begin{cases}]-\infty; 3[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(3-x) + 4 \end{cases}$. Déterminer $f([-7; -\frac{3}{4}])$ et $f^{-1}([5; 11])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$. Déterminer $f([\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}])$ et $f^{-1}([-1; 0])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.4 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 4 - 7x^2 + 21x \end{cases}$. Déterminer $f([-2; 2])$ et $f^{-1}(]-\infty; 18])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{5x+2} - 2 \end{cases}$. Déterminer $f([0; 8])$ et $f^{-1}([-7; -2])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

3. Fonction réciproque/Dérivée de la réciproque.

- 3.1 Montrer que $f : x \mapsto (\sqrt{2x-4} + 1)e^x$ définit une bijection de $[2; +\infty[$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{e^2\}$ et établir une expression de $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} .
- 3.2 Montrer que $f : x \mapsto x^3(3\ln(x) - 1)$ définit une bijection de $]0; 1]$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{-1\}$ et établir une expression de $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} .
- 3.3 Montrer que $f : x \mapsto \ln(\tan(x))$ définit une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur J et établir une expression de $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} .
- 3.4 Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ définit une bijection de $[0; 1[$ dans un ensemble J à préciser et déterminer f^{-1} .
- 3.5 Montrer que $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x+5}$ définit une bijection de $[-1; +\infty[$ dans un ensemble J à préciser et déterminer f^{-1} .
- 3.6 Montrer que $f : x \mapsto e^{2x} - 2e^x$ définit une bijection de $[\ln(2); +\infty[$ dans un ensemble J à préciser et déterminer f^{-1} .

4. Etude asymptotique.

- 4.1 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(x^3 + 2x + 1)$.
- 4.2 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{4x^3+1}{(x+1)^2}$.
- 4.3 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.
- 4.4 Préciser le comportement asymptotique en $-\infty$ de $f : x \mapsto \frac{x+2e^x}{e^x+1}$.
- 4.5 Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x}$.

5. Comparaison asymptotique.

- 5.1 Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}$.

- 5.2 Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.
- 5.3 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto e^{-\frac{3}{x^2}}$ et $g : x \mapsto x^2$.
- 5.4 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- 5.5 Comparer en 0 les fonctions $f : x \mapsto 3x + \sqrt{x^6 + 2x^2}$ et $g : x \mapsto \sin(x^2)$.