

Correction de l'interrogation 3 d'entraînement Bijections

1. Restituer le cours.

1.1 Soient $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{F}(U, V)$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

- L'image directe de A par f est

$$f(A) = \{y \in V \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

- L'image réciproque de B par f est

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in U \mid f(x) \in B\}.$$

1.2 Soient $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{F}(U, V)$.

- On dit que f est injective sur U si et seulement si

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad (f(x) = f(y)) \quad \Rightarrow \quad (x = y).$$

- On dit que f est surjective sur V si et seulement si

$$\forall y \in V, \exists x \in U, \quad y = f(x).$$

- On dit que f est bijective sur U dans V si et seulement si

$$\forall y \in V, \exists! x \in U, \quad y = f(x).$$

1.3 Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si

- f est continue sur I ,
- et strictement monotone sur I ,

alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I , continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).

1.4 Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si

- f est dérivable sur I ,
- strictement monotone sur I ,
- et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$,

alors f^{-1} existe, est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

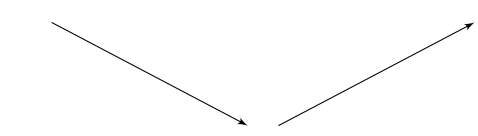
1.5 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a , $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$. On dit que f est négligeable devant g , $f(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$ ou encore $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2. Ensemble image, image réciproque, injection, surjection, bijection.

2.1 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2 + 2x + 1 \end{cases}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x + 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. On en déduit donc le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f			

De plus $f(-1) = 2 - 2 + 1 = 1$, $f(-\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$ et $f(6) = 2 \times 36 + 12 + 1 = 85$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{OU} \quad x = -1.$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	6	$+\infty$
f						

On conclut que

$$f([-1; 6]) = \left[\frac{1}{2}; 85\right] \quad \text{et} \quad f^{-1}([-1; 1]) = [-1; 0].$$

La fonction f n'est ni injective (1 admet deux antécédents -1 et 0) ni surjective (-1 n'a aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

2.2 Soit $f : \begin{cases}]-\infty; 3[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(3 - x) + 4 \end{cases}$. La fonction f est bien définie sur $I =]-\infty; 3[$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{-1}{3 - x} = \frac{1}{x - 3} < 0.$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I . De plus $f(-7) = \ln(10) + 4$, $f(-\frac{3}{4}) = \ln(3 + \frac{3}{4}) + 4 = \ln(\frac{15}{4}) + 4$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$. Enfin pour $x \in I$, on a

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow \ln(3 - x) + 4 = 5 \Leftrightarrow \ln(3 - x) = 1 \Leftrightarrow 3 - x = e \Leftrightarrow x = 3 - e$$

et

$$f(x) = 11 \Leftrightarrow \ln(3 - x) + 4 = 11 \Leftrightarrow \ln(3 - x) = 7 \Leftrightarrow 3 - x = e^7 \Leftrightarrow x = 3 - e^7.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$3 - e^7$	-7	$-\frac{3}{4}$	$3 - e$	3
f	$+\infty$	11	$\ln(10) + 4$	$\ln(\frac{15}{4}) + 4$	5	$-\infty$

On conclut que

$$f\left(\left[-7; -\frac{3}{4}\right]\right) = \left[\ln\left(\frac{15}{4}\right) + 4; \ln(10) + 4\right] \quad \text{et} \quad f^{-1}([5; 11]) = [3 - e^7; 3 - e].$$

De plus la fonction est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$. Donc par le théorème de la bijection, f est une bijection de $]-\infty; 3[$ dans $\left]\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

La fonction f est donc bijective et donc surjective et injective.

2.3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$. La fonction cosinus étant strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$ et de plus $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. On a donc

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
f	2	0

Ainsi,

$$f\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]\right) = [0; 2].$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}([-1; 0]) &\Leftrightarrow f(x) \in [-1; 0] \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{OU} &\exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \\ &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{OU} &\exists k \in \mathbb{Z}, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{aligned} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{\leftarrow}([-1; 0]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \right] \right).$$

Enfin, la fonction f n'est pas injective (car 2π -périodique $f(0) = f(2\pi)$) ni surjective (3 n'a pas d'antécédent car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 2$) et donc a fortiori, f n'est pas bijective.

2.4 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 4 - 7x^2 + 21x \end{cases}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -14x + 21$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -14x + 21 \geq 0 \Leftrightarrow 21 \geq 14x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$. Donc

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f			

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(-2) = 4 - 28 - 42 = -66$, $f(2) = 4 - 28 + 42 = 18$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 - \frac{63}{4} + \frac{63}{2} = 4 + \frac{63}{4} = \frac{79}{4}$. Enfin pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 18 &\Leftrightarrow 4 - 7x^2 + 21x = 18 &\Leftrightarrow 7x^2 - 21x + 14 = 0 \\ &&\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &&\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{OU} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

x	$-\infty$	-2	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f	$-\infty$	-66	18	$\frac{79}{4}$	18	$-\infty$

Ainsi,

$$f([-2; 2]) = \left[-66; \frac{79}{4}\right] \quad \text{et} \quad f^{\leftarrow}([-\infty; 18]) =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

De plus, f n'est pas injective (18 admet deux antécédents) ni surjective ($20 = \frac{80}{4} > \frac{79}{4}$ n'admet aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

2.5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{5x+2} - 2 \end{cases}$. Les fonctions $x \mapsto 5x + 2$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x - 2$ étant strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, donc par la stricte croissance de f , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > -2$. Donc $f^{\leftarrow}([-7; -2]) = \emptyset$. De plus $f(0) = e^2 - 2$, $f(8) = e^{42} - 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
f	-2	$e^2 - 2$	$e^{42} - 2$	$+\infty$

Conclusion,

$$f([0; 8]) = [e^2 - 2; e^{42} - 2] \quad \text{et} \quad f^{\leftarrow}([-7; -2]) = \emptyset.$$

La fonction f est injective sur $\mathbb{R}$ (par sa stricte croissance et le théorème de la bijection, elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -2; +\infty[$) mais n'est pas surjective (-3 n'admet aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

3. Fonction réciproque/Dérivée de la réciproque.

3.1 Soit $f : x \mapsto (\sqrt{2x-4} + 1)e^x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$2x - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2.$$

La fonction f est donc bien définie et même continue sur $[2; +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont. De même, pour $x \geq 2$, $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. La fonction f est donc dérivable sur $]2; +\infty[$ et

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} e^x + (\sqrt{2x-4} + 1) e^x = \left(\frac{1}{\sqrt{2x-4}} + \sqrt{2x-4} + 1 \right) e^x.$$

Or pour tout $x > 2$, $e^x > 0$, $\sqrt{2x-4} > 0$, $\frac{1}{\sqrt{2x-4}} > 0$. Donc

$$\forall x > 2, \quad f'(x) > 0.$$

Ainsi f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$. Puisque f est continue en 2, on en déduit que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Enfin, $f(2) = (\sqrt{4-4} + 1)e^2 = e^2$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x-4} + 1) e^x = +\infty.$$

On a donc

- f est continue sur $[2; +\infty[$,
- f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définit une bijection de } [2; +\infty[\text{ dans } J = \left[f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [e^2; +\infty[.}$$

Posons $J' = J \setminus \{e^2\} =]e^2; +\infty[$. Par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I' =]2; +\infty[$,
- f est strictement croissante sur I' ,
- $\forall x \in I', f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J' =]e^2; +\infty[$ et

$$\forall y \in J', \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2f^{-1}(y)-4}} + \sqrt{2f^{-1}(y)-4} + 1 \right) e^{f^{-1}(y)}}.$$

Conclusion, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]e^2; +\infty[}$ et

$$\boxed{\forall y \in]e^2; +\infty[, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2f^{-1}(y)-4}} + \sqrt{2f^{-1}(y)-4} + 1 \right) e^{f^{-1}(y)}}.}$$

3.2 Soit $f : x \mapsto x^3 (3 \ln(x) - 1)$. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence et produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 3x^2 (3 \ln(x) - 1) + x^3 \left(\frac{3}{x} \right) = x^2 (9 \ln(x) - 3 + 3) = 9x^2 \ln(x).$$

Or pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln(x) < 0$ et $9x^2 > 0$. Donc

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) < 0.$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $]0; 1[$. Puisque f est continue en 1, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]0; 1]$. Enfin, $f(1) = -1$ et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (3 \ln(x) - 1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3x^3 \ln(x) - x^3 = 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$

On a donc

- f est continue sur $]0; 1]$,
- f est strictement décroissante sur $]0; 1]$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définit une bijection de }]0; 1] \text{ dans } J = \left[f(1); \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \right] = [-1; 0[.}$$

Posons $J' = J \setminus \{-1\} =]-1; 0[$. Par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I' =]0; 1[$,
- f est strictement décroissante sur I' ,
- $\forall x \in I', f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J' =]-1; 0[$ et

$$\forall y \in J', \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{9f^{-1}(y)^2 \ln(f^{-1}(y))}.$$

Conclusion, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]-1; 0[}$ et

$$\boxed{\forall y \in]-1; 0[, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{9f^{-1}(y)^2 \ln(f^{-1}(y))}.}$$

3.3 Soit $f : x \mapsto \ln(\tan(x))$. La fonction tangente est bien définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) > 0$. Donc la fonction f est bien définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. De plus f est continue et même dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ comme composée de fonctions qui sont continues et dérivables sur leurs domaines de définition. Puis,

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan(x)}.$$

Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) > 0$. Donc

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ (on pouvait aussi le voir directement comme composée de deux fonctions strictement croissantes). Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(\tan(x)) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \ln(u) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \ln(\tan(x)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty. \end{aligned}$$

On a donc

- f est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$,
- f est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définit une bijection de }]0; \frac{\pi}{2}[\text{ dans } J = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.}$$

Directement, par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[$,
- f est strictement croissante sur I ,
- $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J = \mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1 + \tan^2(f^{-1}(y))}{\tan(f^{-1}(y))}.$$

Conclusion, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1 + \tan^2(f^{-1}(y))}{\tan(f^{-1}(y))}.$$

3.4 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit $x \in [0; 1[$. Alors, $x^2 < 1$ donc $1 - x^2 > 0$. Donc la fonction f est bien définie et même dérivable sur $[0; 1[$. De plus,

$$\forall x \in [0; 1[, \quad f'(x) = \left((1 - x^2)^{-1/2} \right)' = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times (1 - x^2)^{-3/2} = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}}.$$

Pour tout $x \in]0; 1[$, $1 - x^2 > 0$ et $x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; 1[$. Puis par continuité de f en 0, on trouve que f est strictement croissante sur $[0; 1[$. Enfin, $f(0) = 1$ et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{1}{\sqrt{u}} = +\infty.$$

On a donc

- f est continue sur $[0; 1[$,

- f est strictement croissante sur $[0; 1[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$f \text{ définit une bijection de } [0; 1[\text{ dans } J = \left[f(0); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \right[= [1; +\infty[.$$

Soient $x \in [0; 1[$ et $y \in [1; +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2} = y^2 && \text{car } 1-x^2 > 0 \text{ et } y \geq 1 > 0 \leftarrow \textbf{important} \\ &\Leftrightarrow 1-x^2 = \frac{1}{y^2} && \text{car } 1-x^2 \neq 0 \text{ et } y^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2-1}{y^2} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} && \text{car } x \geq 0 \text{ et } y^2-1 \geq 0 \text{ car } y \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} && \text{car } y \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall y \in [1; +\infty[, \quad f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}.$$

3.5 Soit $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x+5}$. Pour tout $x \geq -1$, $x > -\frac{5}{2}$ donc $2x+5 \neq 0$. Donc f est bien définie et même continue et dérivable sur $[-1; +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \geq -1, \quad f'(x) = \frac{2x+5-2(x+3)}{(2x+5)^2} = -\frac{1}{(2x+5)^2}.$$

Donc pour tout $x > -1$, $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$. Enfin, $f(-1) = \frac{2}{3}$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}.$$

On a donc

- f est continue sur $[-1; +\infty[$,
- f est strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$f \text{ définit une bijection de } [-1; +\infty[\text{ dans } J = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(-1) \right[= \left] \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right].$$

Soient $x \in [-1; +\infty[$ et $y \in \left] \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow \frac{x+3}{2x+5} = y \\ &\Leftrightarrow x+3 = y(2x+5) && \text{car } 2x+5 \neq 0 \leftarrow \textbf{important pour la réciproque} \\ &\Leftrightarrow x(2y-1) = 3-5y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3-5y}{2y-1} && \text{car } y \neq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall y \in \left] \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right], \quad f^{-1}(y) = \frac{3-5y}{2y-1}.$$

3.6 Soit $f : x \mapsto e^{2x} - 2e^x$. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions qui le sont donc notamment sur $I = [\ln(2); +\infty[$. De plus,

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1).$$

Pour tout $x \geq \ln(2)$, $e^x \geq 2$. Donc $e^x - 1 \geq 1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur I . Enfin, $f(\ln(2)) = e^{2\ln(2)} - 2e^{\ln(2)} = e^{\ln(4)} - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 2e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^x - 2) = +\infty.$$

On a donc

- f est continue sur $I = [\ln(2); +\infty[$,
- f est strictement croissante sur I .

Donc par le théorème de la bijection,

$$f \text{ définit une bijection de } [\ln(2); +\infty[\text{ dans } J = \left[f(\ln(2)); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [0; +\infty[= \mathbb{R}_+.$$

Soient $x \in [\ln(2); +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}_+$. On a l'équivalence suivante :

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2e^x = y.$$

Posons $X = e^x$. Dès lors,

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 2X = y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 2X - y = 0.$$

Posons Δ le discriminant associé, on a $\Delta = 4 + 4y = 4(y + 1)$. Puisque $y \geq 0$, $y + 1 > 0$ et donc $\Delta > 0$. Le polynôme admet donc deux racines $\frac{2 - \sqrt{4(y+1)}}{2} = 1 - \sqrt{1+y}$ et $1 + \sqrt{1+y}$. Ainsi,

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad X = 1 - \sqrt{1+y} \text{ ou } X = 1 + \sqrt{1+y}.$$

Or $X = e^x > 0$ et puisque $y \geq 0$, $1 + y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+y} \geq 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+y} \leq 0$. Ainsi, $X \neq 1 - \sqrt{1+y}$. Nécessairement,

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad X = 1 + \sqrt{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1 + \sqrt{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(1 + \sqrt{1+y}).$$

Conclusion,

$$\forall y \in [\ln(2); +\infty[, \quad f^{-1}(y) = \ln(1 + \sqrt{1+y}).$$

4. Etude asymptotique.

4.1 Soit $f : x \mapsto \ln(x^3 + 2x + 1)$. On note que f est notamment bien définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty.$$

Regardons alors $f(x)/x$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln(x^3 + 2x + 1)}{x} \\ &= \frac{\ln(x^3(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}))}{x} \\ &= \frac{3\ln(x) + \ln(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x} \\ &= 3\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x}. \end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Conclusion,

$$\text{le graphe de } f \text{ admet en } +\infty \text{ une branche parabolique de direction horizontale } (Ox).$$

4.2 Soit $f : x \mapsto \frac{4x^3+1}{(x+1)^2}$. On note que la fonction f est bien définie sur $] -1; +\infty[$ notamment. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} \frac{1 + \frac{1}{4x^3}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = +\infty.$$

Puis,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times 4x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \times \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = 4.$$

Ensuite, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{4x^3 + 1}{(x + 1)^2} - 4x \\ &= \frac{4x^3 + 1 - 4x(x^2 + 2x + 1)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{-8x^2 - 4x + 1}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{-8x^2}{x^2} \frac{1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \\ &= -8 \frac{1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 4x = -8.$$

Conclusion,

Le graphe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = -4x - 8$.

4.3 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ notamment et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Puis, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x} = \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}} = \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

le graphe de f admet une branche parabolique de direction verticale (Oy) .

4.4 Soit $f : x \mapsto \frac{x+2e^x}{e^x+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 > 1 > 0$. Donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2e^x}{e^x + 1} = -\infty.$$

De plus, pour tout $x < 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1 + 2\frac{e^x}{x}}{1 + e^x}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Puis, pour tout $x < 0$

$$f(x) - x = \frac{x + 2e^x - x e^x - x}{e^x + 1} = \frac{-x e^x + 2e^x}{1 + e^x}.$$

Or par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^x = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Conclusion,

le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = -x$ en $-\infty$.

4.5 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x}$. La fonction f est notamment bien définie sur $[0; +\infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} = \sqrt{1 + \frac{3}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Puis pour tout $x > 0$,

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 + 3x} - x = x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right).$$

Pour lever « l'indéterminé » multiplions par le conjugué :

$$f(x) - x = x \frac{1 + \frac{3}{x} - 1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \frac{3}{2}.$$

Conclusion,

le graphe de f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{3}{2}$.

5. Comparaison asymptotique.

5.1 On a les égalités suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^{3/2} \sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = 1.$$

Donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}} = 1$ puis par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} f(x).$$

5.2 Posons $u = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On a alors les égalités suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{\sin(3u)}{u^2} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{\sin(3u)}{3u} \frac{3u}{u^2}.$$

Or d'après le cours, en posant $v = 3u \xrightarrow[u \rightarrow 0]{u > 0} 0$, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(3u)}{3u} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin(v)}{v} = 1$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{3u}{u^2} = \lim_{u > 0} \frac{3}{u} = +\infty$.

Donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} f(x).}$$

5.3 Posons $u = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{x > 0} +\infty$. Alors, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{3}{x^2}}}{x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-3u} = 0, \quad \text{par croissance comparée.}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(g(x)) .}$$

5.4 Posons $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} +\infty$. Alors,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} -2 \frac{\ln(u)}{u}.$$

Donc par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\ll} g(x).}$$

5.5 Pour tout $x \neq 0$, au voisinage de 0, on a les égalités suivantes :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sin(x^2)}{3x + \sqrt{x^6 + 2x^2}} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \frac{x^2}{3x + \sqrt{2}|x|\sqrt{1 + \frac{x^4}{2}}} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{2}|x|}{x^2}\sqrt{1 + \frac{2}{x^4}}}.$$

Or, en posant $u = x^2 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{x > 0} 0$, d'après le cours,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{2}|x|}{x^2} \sqrt{1 + \frac{2}{x^4}} \right) = 0$. Donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\ll} f(x).}$$