

Correction de l'interrogation 4 d'entraînement Trigonométrie

1. Restituer le cours.

1.1 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)\end{aligned}$$

Si on suppose de plus $a, b, a+b$ et $a-b$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

1.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \\ \cos(a)\sin(b) &= \frac{\sin(a+b) + \sin(b-a)}{2}\end{aligned}$$

1.3 Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) & \sin(p) - \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

1.4 On a les valeurs suivantes :

$\cos(0) = 1,$	$\sin(0) = 0,$	$\tan(0) = 0$
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty.$

1.5 On a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1.$$

1.6 Pour le cosinus, on a

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x \mapsto \cos(x)$	1	0	-1	0	1

Pour le sinus :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x \mapsto \sin(x)$	0	1	0	-1	0

Pour la tangente :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x \mapsto \tan(x)$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0

1.7 Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

1.8 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2. Développer/Linéariser.

2.1 Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(3a) &= \cos(2a) \sin(a) + \cos(a) \sin(2a) \\ &= (1 - 2\sin^2(a)) \sin(a) + 2\cos^2(a) \sin(a) \\ &= \sin(a) - 2\sin^3(a) + 2(1 - \sin^2(a)) \sin(a). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a).$$

2.2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \cos(a+b+c) &= \cos(a+b) \cos(c) - \sin(a+b) \sin(c) \\ &= \cos(a) \cos(b) \cos(c) - \sin(a) \sin(b) \cos(c) - \sin(a) \cos(b) \sin(c) - \cos(a) \sin(b) \sin(c). \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \cos(a+b+c) &= \cos(a) \cos(b) \cos(c) - \sin(a) \sin(b) \cos(c) \\ &\quad - \sin(a) \cos(b) \sin(c) - \cos(a) \sin(b) \sin(c). \end{aligned}$$

2.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \sin(x) \\ &= \frac{\sin(x) - \cos(2x) \sin(x)}{2} \\ &= \frac{\sin(x) - \frac{\sin(2x+x) - \sin(2x-x)}{2}}{2} \\ &= \frac{2\sin(x) - \sin(3x) + \sin(x)}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^3(x) = \frac{3 \sin(x) - \sin(3x)}{4}.$$

2.4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sin^2(3\theta) \cos(5\theta) &= \frac{1 - \cos(6\theta)}{2} \cos(5\theta) \\ &= \frac{\cos(5\theta) - \cos(6\theta) \cos(5\theta)}{2} \\ &= \frac{\cos(5\theta) - \frac{\cos(6\theta+5\theta) + \cos(6\theta-5\theta)}{2}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(3\theta) \cos(5\theta) = \frac{2 \cos(5\theta) - \cos(11\theta) - \cos(\theta)}{4}.$$

2.5 Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On a

$$\begin{aligned} \tan^2(\theta) [\cos(2\theta) + 1] &= \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} 2 \cos^2(\theta) \\ &= 2 \sin^2(\theta) \quad \text{car } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &= 1 - \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan^2(\theta) [\cos(2\theta) + 1] = 1 - \cos(2\theta).$$

3. Factoriser/Mettre sous forme polaire.

3.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sqrt{3} \cos(a) + \sin(a) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(a) + \frac{1}{2} \sin(a) \right) \\ &= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(a) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(a) \right) \\ &= 2 \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{3} \cos(a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2 \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right).$$

3.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= 2 \left(\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right) \\ &= 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(x) \right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) + \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) &= -\cos(x) - \sin(x) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin(x) \right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

3.4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sin(\theta) + \sin(4\theta - \pi) &= \sin(\theta) - \sin(4\theta) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\theta + 4\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - 4\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta) + \sin(4\theta - \pi) = -2 \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right).$$

3.5 Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Attention au piège des notations ! On a

$$\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}}{2}\right).$$

Conclusion,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(\frac{q}{2}\right).$$

3.6 Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) + \sin(p) + \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(p) + \cos(q) + \sin(p) + \sin(q) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Equations trigonométriques.

4.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(2x) - \cos(4x) = \sin(3x) &\Leftrightarrow -2 \sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right) = \sin(3x) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin(3x) \sin(x) = \sin(3x) \\ &\Leftrightarrow \sin(3x) = 0 \quad \text{OU} \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 3x \equiv 0 \pmod{\pi} \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{3}} \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ k \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4} [\frac{\pi}{2}]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \tan(2x) + \tan(x) = 0 & \Leftrightarrow \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} + \tan(x) = 0 & \text{car } \tan^2(x) \neq 1 \text{ car } x \not\equiv \frac{\pi}{4} [\frac{\pi}{2}] \\ & \Leftrightarrow 2 \tan(x) + \tan(x) - \tan^3(x) = 0 & \text{car on a toujours } 1 - \tan^2(x) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow 3 \tan(x) - \tan^3(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \tan(x) = 0 \quad \text{OU} \quad \tan^2(x) = 3 \\ & \Leftrightarrow \tan(x) = 0 \quad \text{OU} \quad \tan(x) = \sqrt{3} \quad \text{OU} \quad \tan(x) = -\sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{\pi}{3} [\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3} [\pi]. \end{aligned}$$

Ces valeurs étant compatibles avec le domaine de définition de x , on conclut que l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned} 3 \tan(x) = 2 \cos(x) & \Leftrightarrow 3 \sin(x) = 2 \cos^2(x) & \text{car } \cos(x) \neq 0 \text{ car } x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ & \Leftrightarrow 3 \sin(x) = 2 - 2 \sin^2(x) \\ & \Leftrightarrow 2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x \mapsto 2x^2 + 3x - 2$. On a $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-3-5}{4} = -2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} 3 \tan(x) = 2 \cos(x) & \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \sin(x) = -2 \text{ (impossible)} \\ & \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{aligned}$$

Ces valeurs étant compatibles avec le domaine de définition de x , on conclut que l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(3x) + \cos(x) = 2 & \Leftrightarrow \cos(2x) \cos(x) - \sin(2x) \sin(x) + \cos(x) = 2 \\ & \Leftrightarrow (2 \cos^2(x) - 1) \cos(x) - 2 \cos(x) \sin^2(x) + \cos(x) = 2 \\ & \Leftrightarrow 2 \cos^3(x) - \cos(x) - 2 \cos(x) (1 - \cos^2(x)) + \cos(x) = 2 \\ & \Leftrightarrow 4 \cos^3(x) - 2 \cos(x) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Soit $P : t \mapsto 4t^3 - 2t - 2$. On note que $t = 1$ est une racine de P , donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = (t - 1)(4t^2 + 4t + 2).$$

Soit Δ le discriminant de $t \mapsto 4t^2 + 4t + 2$, on a $\Delta = 16 - 32 = -16 < 0$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $4t^2 + 4t + 2 > 0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

D'où,

$$\cos(3x) + \cos(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 0 [2\pi].$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \sin^4(x) - \cos^4(x) = 2 \sin(x) \cos(x) \\
 \Leftrightarrow & (\sin^2(x))^2 - (\cos^2(x))^2 = \sin(2x) \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 = \sin(2x) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x) - 1 - 2\cos(2x) - \cos^2(2x)}{4} = \sin(2x) \\
 \Leftrightarrow & -\cos(2x) = \sin(2x) \\
 \Leftrightarrow & \cos(2x + \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\
 \Leftrightarrow & 2x + \pi \equiv \frac{\pi}{2} - 2x \pmod{2\pi} \quad \text{OU} \quad 2x + \pi \equiv 2x - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\
 \Leftrightarrow & 4x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{OU} \quad \pi \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ (impossible)} \\
 \Leftrightarrow & 4x \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi} \\
 \Leftrightarrow & x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{2}}.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5. Inéquations trigonométriques.

5.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) > \sqrt{2} & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{12} + 2k\pi; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right[.$$

5.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \cos(4x) + (\sqrt{3} - 2) \sin(2x) \geq 1 - \sqrt{3} & \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(2x) + (\sqrt{3} - 2) \sin(2x) - 1 + \sqrt{3} \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow 2\sin^2(2x) - (\sqrt{3} - 2) \sin(2x) - \sqrt{3} \leq 0.
 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $P : t \mapsto 2t^2 - (\sqrt{3} - 2)t - \sqrt{3}$, on a

$$\Delta = (\sqrt{3} - 2)^2 + 8\sqrt{3} = 3 - 4\sqrt{3} + 4 + 8\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = (\sqrt{3} + 2)^2.$$

Par conséquent, les racines associées sont $\frac{\sqrt{3}-2-(\sqrt{3}+2)}{4} = -1$ et $\frac{\sqrt{3}-2+(\sqrt{3}+2)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \cos(4x) + (\sqrt{3} - 2) \sin(2x) \geq 1 - \sqrt{3} & \Leftrightarrow -1 \leq \sin(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \\
 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{7\pi}{6} + k\pi \right].$$

5.3 Soit $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$. Notons que puisque la fonction tangente est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a alors $\tan(x) \in [0; 1]$. On a alors les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned} \tan(2x) \leq 3 \tan(x) &\Leftrightarrow \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \leq 3 \tan(x) && \text{car } 1 - \tan^2(x) \neq 0 \text{ car } \tan(x) \in [0; 1[\\ &\Leftrightarrow 2 \tan(x) \leq 3 \tan(x) - 3 \tan^3(x) && \text{car } 1 - \tan^2(x) > 0 \text{ car } \tan(x) \in [0; 1[\\ &\Leftrightarrow (3 \tan^2(x) - 1) \tan(x) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \tan^2(x) - 1 \leq 0 && \text{car } \tan(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \tan^2(x) \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \tan(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} && \text{car } \tan(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \tan(x) \leq \tan\left(\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Or $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$. Conclusion l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \left[0; \frac{\pi}{6}\right].$$

5.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &\cos\left(2x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{12} \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{17\pi}{12} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{17\pi}{24} + k\pi \right].$$

5.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 4 \cos(x) \sin(x) + 1 \leq 0 &\Leftrightarrow 2 \sin(2x) \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) \leq -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi; -\frac{\pi}{12} + k\pi \right].$$