

Interrogation 6 d'entraînement Calcul algébrique

1. Restituer le cours.

- 1.1 Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
- 1.2 Donner la somme géométrique.
- 1.3 Énoncer la formule de Bernoulli.
- 1.4 Énoncer la formule du binôme de Newton.
- 1.5 Définir le coefficient binomial.
- 1.6 Énoncer la formule de Pascal.

2. Reconnaître une somme usuelle.

- 2.1 Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+2} - a_k)$.
- 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.
- 2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)$.
- 2.4 Soit $(s, b) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $S_s = \sum_{u=2}^s \binom{s}{u} (3 \times 5^u)^b$.
- 2.5 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=-2}^n (k+a)^3$.

3. Savoir faire un changement d'indice.

- 3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_n = \prod_{k=0}^n (2n - 4 + k)$. Mettre le résultat sous forme de factoriels.
- 3.2 Calculer $S = \sum_{k=0}^{100} (\sqrt{102 - k} - \sqrt{k})$.
- 3.3 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n+p}{k} = \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{k}$.
- 3.4 Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, $p \geq m + 1$. Calculer $\sum_{n=0}^{p-m} e^{\pi(n+m)^2} - \sum_{k=m}^{p-1} e^{\pi k^2}$.
- 3.5 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq p \geq 1$. Montrer que $\sum_{k=0}^n [\sin(k+p) - \sin(k)] = \sum_{k=0}^{p-1} [\sin(k+n+1) - \sin(k)]$.
Séparer la somme en deux et commencer par imiter la démonstration du calcul de la somme télescopique.

4. Sommes doubles rectangulaires.

4.1 Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $S_{n,m} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (2i - j)$.

4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij^3$.

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + 2j)^3$.

4.4 Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer $S_{n,m} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \binom{n}{i} \binom{m}{j} (3^i + 5^j)$.

4.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \cos\left((l + k) \frac{\pi}{3}\right)$.

5. Sommes doubles triangulaires.

5.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j-1}$.

5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n - i)j$.

5.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q^{i+j}$.

5.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i^2}{2j-1}$.