Interrogation 7 d'entrainement
Fonctions usuelles

1. **Restituer le cours.**
   - 1.1 Tracer le graphe de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique /arccosinus / arcsinus / arctan, y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
   - 1.2 Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
   - 1.3 Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan.
   - 1.4 Enoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.

   Révisions
   - 1.5 Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
   - 1.6 Comment obtient-on le graphe de $g_1 : x \mapsto f(x) + a$? de $g_2 : x \mapsto f(x + a)$? de $g_3 : x \mapsto af(x)$? de $g_4 : x \mapsto f(ax)$?
   - 1.7 Définir une fonction paire ou impaire. Que dire de son graphe ?
   - 1.8 Définir une fonction croissante et une fonction strictement décroissante.
   - 1.9 Définir une fonction majorée, minorée, bornée. Caractériser par la valeur absolue le fait qu'une fonction soit bornée.
   - 1.10 Définir une fonction continue en a.
   - 1.11 Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
   - 1.12 Définir une fonction dérivable en a. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?
2. **Manipuler les fonctions logarithme et exponentielle.**
   - 2.1 Développer $\ln\left(\left(\sqrt{7}\right)^{3/2}\sqrt[5]{2}\right) + \ln\left(\left(\frac{16}{7^{1/3}}\right)^{3/4}\right)$.
   - 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Développer $\ln\left(\sum_{k=1}^{n} 3^k\right)$.
   - 2.3 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln(2) + \ln(\tan(x)) - \ln(1 + \tan(x)) - \ln(1 - \tan(x))$ puis factoriser $f(x)$.
   - 2.4 Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln\left(\frac{(4x-1)^{1/3}}{\sin^2(x)}\right)$ puis développer $f(x)$.
   - 2.5 Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(2x) - 1)$ puis développer $f(x)$.
   - 2.6 Calculer $\left(\mathrm{e}^2\right)^{4\ln(2)}\left(\left(\mathrm{e}^{-3}\right)^{\ln(2)}\right)^2$.
   - 2.7 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\frac{\left(\mathrm{e}^{\cos^2(x)}\frac{1}{\mathrm{e}^{-\sin^2(x)}}\right)^7}{\left(\mathrm{e}^{3^2}\right)^2}$.
   - 2.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathrm{e}^{k^2}\right)\left(\mathrm{e}^k\right)^2}{\mathrm{e}^{-1}}$.
   - 2.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\mathrm{e}^{(k+1)^2}\right)^3}{\mathrm{e}^{3k^2}}\right)^{-2}$.
3. **Calcul de limite.**
   - 3.1 Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (1-x)^{1/x}$.
   - 3.2 Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\arccos\left(x^x - 1\right) - \pi}{x^x - 1}$.
   - 3.3 Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1 - \cos\left(x^3\ln(x)\right)}{x^6\ln^2(x)}$.

3.4 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2}$.

3.5 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{\mathrm{sh}(x^3)}$

3.6 Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}$.

4. **Simplification de fonctions.**

4.1 Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) + \arctan 2x^2$. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f et simplifier f sur $]-1;1[$.

4.2 Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right)$. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f et simplifier f sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

4.3 Soit $f : x \mapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x))$. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f et simplifier f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.4 Soit $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f et simplifier f sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4.5 Soit $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 2\arctan(\sqrt{x})$. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f et simplifier f sur $\mathbb{R}_+$.

5. **Equations.**

5.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2^{x+1} + 4^x = 15$.

5.2 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\log_a(x) = \log_x(a)$.

5.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2^{x^2} = 3^{x^3}$.

5.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(\arcsin(x) - 5)\arcsin(x) = -4$.

5.5 Démontrer que l'équation $\arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$ admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.

5.6 Démontrer que l'équation $\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.

5.7 Démontrer que l'équation $\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4}$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$ et préciser l'unique valeur du réel possiblement solution.

5.8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \arctan(x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$.

6. **BONUS (ne sera pas à l'interrogation) : dérivation.**

6.1 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \frac{\log_a(3x-1)}{2}\sqrt{x-5}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis dériver f.

6.2 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \mathrm{ch}\left(2\log_a\left(\mathrm{sh}\left(2x\right)\right)\right)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis dériver f.

6.3 Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis dériver f.

6.4 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \arctan\left(2\log_a\left(3x+4\right)\right)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis dériver f.

6.5 Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis dériver f.