Interrogation 8 d'entrainement
Equations et géométrie complexes

1. **Restituer le cours.**
   - 1.1 Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
   - 1.2 Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
   - 1.3 Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
   - 1.4 Définir l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines n-ième de l'unité ? de l'inverse d'une racine n-ième de l'unité ? de son conjugué ?
   - 1.5 Caractériser l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   - 1.6 Définir j. Que vaut j^2 ? j^3 ? $1+j+j^2$?
   - 1.7 Caractériser les racines n-ièmes de l'unité par une somme.
   - 1.8 Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

   Révisions
   - 1.9 Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
   - 1.10 Définir une fonction injective, surjective, bijective.
   - 1.11 Enoncer le théorème de la bijection.
   - 1.12 Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
   - 1.13 Définir la négligeabilité entre deux fonctions.
2. **Racines carrées d'un complexe.**
   - 2.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 16 - 30i$.
   - 2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 2 + i$.
   - 2.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.
   - 2.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 3 - i$.
   - 2.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{9}} + \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{9}}$.
3. **Racines n-ièmes d'un complexe.**
   - 3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^7 + 1 = 0$.
   - 3.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.
   - 3.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^{11} = -5i$.
   - 3.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z-i)^7 = (z+i)^7$.
   - 3.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z+i)^4 = (z+1)^4$.
4. **Equations complexes du second degré.**
   - 4.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 5z + 7 + i = 0$.
   - 4.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.
   - 4.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$.
   - 4.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0$.
   - 4.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$.
5. **Applications géométriques.**
   - 5.1 Soient $A(1+i)$, $B(4+3i)$ et $C\left(\frac{5}{2}i\right)$. Montrer que ABC est rectangle en A.
   - 5.2 Soient $A\left(\sqrt{3}-i\right)$, $B\left(2\sqrt{3}\right)$ et $C\left(1+\sqrt{3}-i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$. Montrer que ABC est rectangle en A.
   - 5.3 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Soient $A((1+i)z)$, $B(1+iz)$ et $C(z-i)$. Montrer que A, B et C sont alignés.
   - 5.4 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-i\}$. Soient $A((1+i)z)$, $B(iz-i)$ et $C(z-1)$. Montrer que A, B et C sont alignés.
   - 5.5 Soit $f : z \mapsto z - 1 + 3i$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   - 5.6 Soit $f : z \mapsto iz + 1 - i$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   - 5.7 Soit $f : z \mapsto \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   - 5.8 Soit $f : z \mapsto \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + i + \sqrt{3}$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   - 5.9 Soit $f : z \mapsto (1+i)z$. A quelle transformation du plan correspond f ?