

Correction Automne 01

Fonctions réelles

Solution de l'exercice 1

1. Les fonctions $x \mapsto x-1$, $x \mapsto e^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Par conséquent, la fonction f est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

2. Inutile de se fatiguer sur de la parité : $\mathcal{D}_f$ n'est pas centré en 0 donc

$$\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}$$

Notez que f n'est pas non plus périodique. Pas de réduction du domaine d'étude.

3. On a les égalités suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Or par continuité de la fonction exponentielle en 1, $\lim_{u \rightarrow 1} e^u = e$. Donc par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x-1}} = e.$$

Ainsi, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times e = +\infty.$$

De même $\frac{x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \times e = -\infty.$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, on a

$$x \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x(x-1)}{x} e^{\frac{x}{x-1}} = (x-1) e^{\frac{x}{x-1}} = f(x).$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}, \quad f(x) = x \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x}{x-1}}.$$

- (b) Notons que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$

Posons $u = \frac{x}{x-1}$, par composition, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x}{x-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty \quad \text{par croissance comparée.}$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x \times \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x}{x-1}} = 1 \times +\infty = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{x-1} = -\infty.$$

Donc par composition,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x}{x-1}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u}{u} = 0.$$

Pas de croissance comparée ici car pas de forme indéterminée. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x \times \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\frac{x}{x-1}} = 1 \times 0 = 0.$$