

Correction Automne 03

Trigonométrie

Solution de l'exercice 1

1. On sait que pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(p) + \sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. D'où, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(5x) + \sin(x) = 2 \sin\left(\frac{5x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x-x}{2}\right) = 2 \sin(3x) \cos(2x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (E) \quad & \sin(5x) + \sin(x) + 2 \sin^2(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & 2 \sin(3x) \cos(2x) + 2 \sin^2(x) - 1 = 0 && \text{par la question précédente} \\ \Leftrightarrow & 2 \sin(3x) \cos(2x) - \cos(2x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos(2x) (2 \sin(3x) - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos(2x) = 0 \text{ OU } 2 \sin(3x) - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x \equiv 0 \text{ } [\pi] \text{ OU } \sin(3x) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & x \equiv 0 \text{ } \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ OU } 3x \equiv \frac{\pi}{6} \text{ } [2\pi] \text{ OU } 3x \equiv \frac{5\pi}{6} \text{ } [2\pi] \\ \Leftrightarrow & x \equiv 0 \text{ } \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ OU } x \equiv \frac{\pi}{18} \text{ } \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ OU } x \equiv \frac{5\pi}{18} \text{ } \left[\frac{2\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$