

Correction Automne 04 Complexes

Solution de l'exercice 1

1. Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de h dans $\mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$h(z) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad z + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-1\}}.$$

2. On note que $-i \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} h(-i) &= -\frac{i \times (-i) + 2}{-i + 1} \\ &= -\frac{1 + 2}{1 - i} \\ &= -\frac{3(1 + i)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{h(-i) = -\frac{3}{2}(1 + i)}.$$

De plus,

$$h(-i) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

D'où la forme polaire de $h(-i)$ est donnée par

$$\boxed{h(-i) = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i}}.$$

3. Soit $z \in \mathcal{D}$. On note M le point d'affixe z , M' celui de $h(z)$, ρ le module de $z + 1$ et ρ' celui de $h(z) + i$.

(a) On a les égalités dans $\mathbb{R}_+$ suivantes :

$$\begin{aligned} \rho\rho' &= |z + 1| |h(z) + i| \\ &= |z + 1| \left| -\frac{iz + 2}{z + 1} + i \right| \\ &= |z + 1| \left| \frac{-iz - 2 + iz + i}{z + 1} \right| \\ &= |-2 + i| \\ &= \sqrt{4 + 1} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\rho\rho' = \sqrt{5}}.$$

(b) Supposons que $M(z)$ soit sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-1)$ et de rayon 2. Alors,

$$|z - (-1)| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |z + 1| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2.$$

Par la question précédente,

$$\sqrt{2}\rho' = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad \rho' = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |h(z) + i| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |h(z) - (-i)| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc, dans ce cas, on en déduit que

$M'(h(z))$ appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre $B(-i)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.