

## Correction Automne 05

### Calcul algébrique

#### Solution de l'exercice 1

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Par définition de coefficient binomial, on a les égalités suivantes :

$$p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n \binom{n-1}{p-1}.$$

L'entier  $n$  ne dépendant pas de la variable de sommation, on obtient que

$$\sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = n \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} 1^p 1^{n-1-p}.$$

On reconnaît dans la dernière expression la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = n (1+1)^{n-1} = n 2^{n-1}.$$