

Correction Automne 07

Fonctions réelles

Solution de l'exercice 1

1. On note que f est dérivable sur son domaine de définition comme produit et composée de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{\frac{x}{x-1}} + (x-1) \left(\frac{x}{x-1} \right)' e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} + (x-1) \frac{x-1-x}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} \left(1 + \frac{-1}{x-1} \right) \\ &= \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x-1} > 0.$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x-1$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	-	0	+

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$, strictement décroissante sur $]1; 2]$ et enfin strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Puisque

$$f(2) = 1 \times e^{\frac{2}{1}} = e^2.$$

On en conclut le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	e^2	$+\infty$

2. (a) Soit $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{x-1}} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} - e^{\frac{x}{x-1}} &= e^x \left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) - e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= x e^{\frac{1}{x-1} + 1} - e^x - e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= x e^{\frac{x}{x-1}} - e^{\frac{x}{x-1}} - e^x \\ &= (x-1) e^{\frac{x}{x-1}} - e^x \\ &= f(x) - e^x. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x > 1, \quad f(x) - ex = e \frac{x}{x-1} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} - e^{\frac{x}{x-1}}.$$

(b) On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^{\frac{x}{x-1}}.$$

Or $u = \frac{x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \times e^1 = e.$$

De plus, par la question précédente,

$$\forall x > 1, \quad f(x) - ex = e \frac{x}{x-1} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} - e^{\frac{x}{x-1}}.$$

Posons $u = \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - e^0}{u - 0}.$$

On reconnaît en 0 la limite du taux d'accroissement de la fonction exponentielle qui est dérivable en 0. D'où,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$

De plus, $\frac{x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ex = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \frac{x}{x-1} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} - e^{\frac{x}{x-1}} = e \times 1 \times 1 - e = 0.$$

Conclusion,

Le graphe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ex$.