

Correction Automne 08

Bijection

Solution de l'exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 4 - (x + 1)^2$.

1. La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2(x + 1).$$

Dès lors, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x + 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; -1[$. De même, f est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Enfin, $f(-1) = 4 - 0 = 4$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$-\infty$	4	$-\infty$

On observe que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 4$. Donc 5 par exemple ne possède aucun antécédent par f . Ainsi, f n'est pas surjective.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} f(-2) = 4 - (-2 + 1)^2 = 4 - 1 = 3 \\ f(0) = 4 - (0 + 1)^2 = 3. \end{cases}$$

Donc $f(-2) = f(0)$ et f n'est pas injective. Conclusion,

f n'est ni injective ni surjective.

A fortiori, f n'est donc pas bijective.

2. D'après le tableau de variation de la question précédente, on a

$$f(\mathbb{R}) =]-\infty; 4].$$

Puisque $0 > -1$ toujours par le tableau précédent,

$$f(\mathbb{R}_+) =]-\infty; 4].$$

De plus, on a $f(0) = 3$, $f(1) = 0$ et f est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$. Donc

$$f([0; 1]) = [0; 3].$$

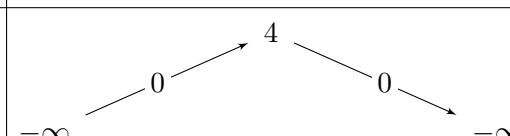
3. Puisque f est définie sur $\mathbb{R}$, on a

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = 0 & \Leftrightarrow 4 - (x+1)^2 = 0 & \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \\ & \Leftrightarrow x+1 = 2 \text{ OU } x+1 = -2 \\ & \Leftrightarrow x = 1 \text{ OU } x = -3. \end{aligned}$$

Dès lors, on a

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
f					

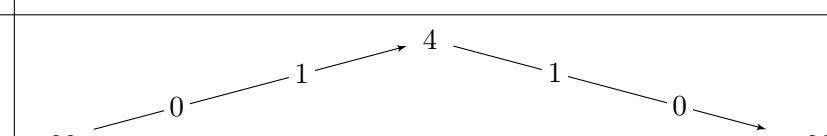
Ainsi,

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_+) =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[.$$

Enfin, on

$$\begin{aligned} f(x) = 1 & \Leftrightarrow 4 - (x+1)^2 = 1 & \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3 \\ & \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3} \text{ OU } x+1 = -\sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1 \text{ OU } x = -\sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

D'où,

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}-1$	-1	$\sqrt{3}-1$	1	$+\infty$
f							

Conclusion,

$$f^{\leftarrow}([0; 1]) = [-3; -\sqrt{3}-1] \cup [\sqrt{3}-1; 1].$$

4. Par ce qui précède, on observe que f est continue et strictement décroissante sur $I = [-1; +\infty[$. Donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus, on a

$$f(I) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-1) \right] =]-\infty; 4].$$

Conclusion,

$$f \text{ définit une bijection de } I = [-1; +\infty[\text{ dans } J =]-\infty; 4].$$

On note φ la restriction de f de I dans J .

5. Soient $x \in I$ et $y \in J$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 y = \varphi(x) &\Leftrightarrow y = f(x) \\
 &\Leftrightarrow y = 4 - (x + 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 - y \\
 &\Leftrightarrow x + 1 = +\sqrt{4 - y} \quad \text{car } \begin{cases} 4 - y \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4 - y}.
 \end{aligned}$$

Conclusion, la réciproque de φ est donnée par

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ll} J =]-\infty; 4] & \rightarrow I = [-1; +\infty[\\ y & \mapsto 1 + \sqrt{4 - y}. \end{array}$$