

Correction Automne 09

Trigonométrie

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ et que $2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \cos^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x) - \sin^2(x) &\geq -1 &\Leftrightarrow &\cos(2x) - \sin(2x) \geq -1 \\
 &&\Leftrightarrow &\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &&\Leftrightarrow &\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &&\Leftrightarrow &\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
 &&\Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\
 &&\Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\pi + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
 &&\Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + k\pi \right].$$