

Correction Automne 10

Complexes

Solution de l'exercice 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$f(z) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad z - i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq i.$$

Conclusion,

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{C} \setminus \{i\}.$$

2. Soit $\theta \in [-\pi; \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$. Alors $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$ donc $z \neq i$ et $f(z)$ existe. De plus,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z - i} \\ &= \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{e^{i\theta}}{e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} (e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})})} \quad \text{par une factorisation par l'angle moitié} \\ &= \frac{e^{i\theta} e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}}{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}} \\ &= \frac{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{par la formule d'Euler} \\ &= \frac{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}}{2e^{i\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4})}}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4})}}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. *Méthode 1.* Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) &\Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f(z) = -\overline{f(z)} \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{z - i} = -\frac{\bar{z}}{\bar{z} + i} \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + iz = -|z|^2 + i\bar{z} \quad \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow 2|z|^2 + i(z - \bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2|z|^2 - 2\text{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - \text{Im}(z) = 0 \end{aligned}$$

Posons $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors,

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - b = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

On remarque alors l'équation du cercle de centre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ ou encore de centre $\omega = \frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Notons $\mathcal{C}$ ce cercle. Puisque $i \in \mathcal{C}$ et que $z \neq i$, on en conclut que

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) = \mathcal{C} \setminus \{i\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Méthode 2. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $O(0)$, $A(i)$ et $M(z)$ trois points du plan complexes. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) &\Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{z-i} \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-0}{z-i}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) \equiv 0 [\pi] \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{OM} \\ &\Leftrightarrow \text{le triangle } OMA \text{ est rectangle en } M \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle } \mathcal{C} \text{ de diamètre } [OA]. \end{aligned}$$

On observe que $\Omega\left(\frac{i}{2}\right)$ est le milieu de $[OA]$ donc le centre du cercle $\mathcal{C}$ et que $OA = 1$ donc $\mathcal{C}$ a un rayon égal à $1/2$. Conclusion,

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) = \mathcal{C} \setminus \{i\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}.$$