# Correction Automne 12
# Fonctions usuelles

**Solution de l'exercice 1**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction arcsin n'est définie que sur $[-1;1]$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \\ 1+x^2 \neq 0 \text{ toujours vrai} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad -1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2 \qquad \text{car } 1+x^2>0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant x^2+2x+1 \\ 0 \leqslant 1-2x+x^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant (x+1)^2 \text{ toujours vrai} \\ 0 \leqslant (1-x)^2 \text{ toujours vrai} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Conclusion, la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

2. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Donc de même qu'à la question précédente, on a, pour $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D}' \quad &\Leftarrow \quad -1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -1-x^2 < 2x < 1+x^2 \qquad \text{car } 1+x^2>0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < (x+1)^2 \\ 0 < (1-x)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Conclusion, la fonction $f$ est dérivable sur

$$\boxed{\mathcal{D}' = ]-\infty;-1[ \cup ]-1;1[ \cup ]1;+\infty[ .}$$

3. Par la question précédente, $f$ est dérivable sur $]1;+\infty[$. De plus pour tout $x \in ]1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2\left(1+x^2\right)-(2x)(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&= \frac{2\left(1+x^2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \\
&= \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \qquad \text{car } 1+x^2>0 \\
&= \frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}} \\
&= \frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2} \frac{1}{x^2-1} \qquad \text{car } x^2-1>0 \text{ car } x>1 \\
&= -\frac{2}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\forall x \in ]1;+\infty[\,, \qquad f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}.}$$

4. Puisque $]1;+\infty[$ est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ (au contraire de $\mathcal{D}'$ par exemple), on en déduit

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in ]1;+\infty[\,, \qquad f(x) = -2\arctan(x) + C.$$

Or la fonction $f$ et la fonction arctan sont continues en 1 donc par passage à la limite quand $x \to 1$, on obtient

$$f(1) = -2\arctan(1) + C.$$

Autrement dit, la relation reste vraie pour $x = 1$. On en déduit également que

$$\arcsin\left(\frac{2}{1+1}\right) = -2\frac{\pi}{4} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [1;+\infty[\,, \qquad f(x) = \pi - 2\arctan(x).}$$

*NB1 : On pouvait aussi prendre la limite en $+\infty$ ou la valeur de $\sqrt{3}$ pour obtenir $C$.*
*NB2 : On peut aussi obtenir une expression de $f$ sur $[-1;1]$ et/ou sur $]-\infty;-1]$. Pour ce dernier intervalle on peut aussi se servir de son imparité.*