

TD2

Fonctions réelles

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \ln((x-1)^2 + 2)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le tableau de variations de f .
3. Déterminer les ensembles suivants :

$$1. f(\mathbb{R}) \quad 2. f([-1; 1]) \quad 3. f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \quad 4. f^{\leftarrow}([\ln(3); \ln(4)])$$

Exercice 2 A l'aide de la parité, étudier les fonctions suivantes :

$$1. f_1 : x \mapsto \ln(|x|). \quad 2. f_2 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$3. f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \quad 4. f_4 : x \mapsto \frac{x^3(\sin(x)-x)}{2}.$$

Exercice 3 Etudier le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes puis les dériver sur cet ensemble.

$$1. f_1 : x \mapsto \cos^6(x). \quad 2. f_2 : x \mapsto \ln(\ln(x)).$$

$$3. f_3 : x \mapsto e^{\sin(x)}. \quad 4. f_4 : x \mapsto \sqrt{(x^2 + 1)^3}.$$

$$5. f_5 : x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}. \quad 6. f_6 : x \mapsto x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$7. f_7 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right). \quad 8. f_8 : x \mapsto e^{\frac{1}{x} \ln(x)}.$$

Exercice 4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}.$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 5 Etudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto x e^{-x}. \quad 2. x \mapsto \frac{2x^2+1}{x^2+3}.$$

$$3. x \mapsto \frac{x^2+1}{2\sqrt{x-3}}. \quad 4. x \mapsto \frac{x^3+x+1}{x^2+4}.$$

Pour aller plus loin

Exercice 6 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$$1. f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+x-2}{2x^3+7x^2+2x-3}}. \quad 2. g : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} + x).$$

$$3. h : x \mapsto \ln(\cos(2x + \pi)). \quad 4. i : x \mapsto \sqrt{\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Exercice 7 Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x-1| + 2|x+2|$.

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes et T -périodiques, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ soit croissante sur I et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur I . Montrer que f est strictement décroissante sur I .

Exercice 10 Etudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}. \quad 2. x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x^2+2}{x}\right). \quad 3. x \mapsto \frac{x^3+x^2-x}{x^2-1}.$$

$$4. x \mapsto \frac{x^2-x+1}{|x-1|-x}. \quad 5. x \mapsto x + \sqrt{x}. \quad 6. x \mapsto x^{\frac{2\ln(x)+1}{\ln(x)}}.$$

Rab

Exercice 11 Décomposer les fonctions suivantes en composées de fonctions élémentaires et préciser la suite des ensembles images.

$$1. f : x \mapsto \cos(e^{\sin(x)-1}) + 1. \quad 2. g : x \mapsto \sqrt{\frac{-1}{\ln(1-4x^2)}}.$$

$$3. h : x \mapsto \ln^2\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right).$$

Exercice 12 Dédurre des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

$$1. f : x \mapsto (2x+3)^2 - 2. \quad 2. g : x \mapsto 1 - \frac{2}{x-3}.$$

$$3. h : x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}}. \quad 4. i : x \mapsto -1 - \frac{\cos(x-1)}{2}. \quad 5. j : x \mapsto 2|x+2| - 1.$$

Exercice 13 Déterminer la parité des fonctions suivantes.

$$1. f_1 : x \mapsto 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6. \quad 2. f_3 : x \mapsto \frac{1}{(x^3-2x)^3} \times \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$3. f_4 : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad 4. f_6 : x \mapsto \left|2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)\right|.$$

$$5. f_8 : x \mapsto x^3 \frac{\sin(x)-x}{2+\cos^2(x)}.$$

TD2 bis Bijection

Exercice 14 Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[, x \mapsto \frac{1}{x-1}$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - x$.
3. $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$.
4. $f : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[, x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 15 Soient $I =]0; +\infty[$ et $f : x \mapsto 1 + x + 2\sqrt{x}$.

1. Factoriser l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
2. Montrer que f réalise une bijection de I dans un ensemble à J à préciser.
3. Montrer que f est dérivable sur I calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.
4. Exprimer pour tout $x \in I$, $f'(x)$ en fonction de $y = f(x)$.
5. En déduire que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer pour tout $y \in J$ une expression de $(f^{-1})'(y)$ en fonction de y .
6. En déduire f^{-1} .
7. Retrouver le résultat précédente par une méthode directe.

Pour aller plus loin

Exercice 16 Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est impaire.
2. Calculer les limites de f et préciser les éventuelles asymptotes.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que f est bijective.
5. On pose $u = e^x - 1$ et $v = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de u et v . En déduire une expression de f' en fonction de f .
6. Sans calculer f^{-1} , déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$.

7. En déduire une expression explicite de f^{-1} .
8. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

Exercice 17 Soit

$$f : \begin{array}{l} [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}. \end{array}$$

1. Prouver que f réalise une bijection de $[2; +\infty[$ sur son ensemble image. On note g sa fonction réciproque.
2. Sans calculer g , déterminer l'ensemble de dérivabilité de g , justifier que g admet une tangente verticale en 1 et montrer que pour tout y dans le domaine de dérivabilité, $g'(y)g(y) - 2g'(y) = y$.
3. En déduire une expression explicite de g .
4. Retrouver la question précédente par une méthode directe.

Rab

Exercice 18 Etudier les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$.
2. $x \mapsto e^{x \ln(x)}$.
3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
4. $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.
5. $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}\right)$.
6. $x \mapsto e^{x^2 \ln(x)}$.
7. $x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$.
8. $x \mapsto x^2 + 1 - \frac{2}{x}$.
9. $x \mapsto x^2 e^{-x}$.
10. $x \mapsto \frac{2\ln(x) + 3}{x}$.
11. $x \mapsto \frac{x^2 + x}{|x| + 1}$.
12. $x \mapsto x + \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

Exercice 19 Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[, x \mapsto x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer si f est injective, surjective ou bijective.
2. Montrer que la restriction g de f à l'ensemble $] -1; 1[$ définit une bijection de $] -1; 1[$ dans un intervalle J à déterminer.
3. Déterminer g^{-1} .