

TD4

Nombres complexes

Exercice 1 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

$$1. z_1 = (6 + 3i)(4 - 2i) \quad 2. z_2 = \frac{7+3i}{3-7i} \quad 3. z_3 = (1 + i)^3$$

Exercice 2 Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants.

$$1. z_1 = 3 + 3i \quad 2. z_2 = -1 - \sqrt{3}i \quad 3. z_3 = -\frac{4}{3}i$$

$$4. z_4 = -2 \quad 5. z_5 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \quad 6. z_6 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$$

$$7. z_7 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 Déterminer la forme polaire de $1 + i$, $1 - i$ et $\sqrt{3} + i$. En déduire une expression simplifiée des complexes suivants :

$$1. z_1 = \frac{(1-i)^5}{(i+1)^4} \quad 2. z_2 = (1 + i)^{30} \quad 3. z_3 = \left((1 - i)^2 (\sqrt{3} + i)\right)^{24}$$

Exercice 4 Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide des complexes, linéariser les expressions suivantes :

$$1. \cos^4(x) \quad 2. \sin^2(x) \cos^3(x)$$

Exercice 5 Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide des complexes, développer les expressions suivantes :

$$1. \sin(3x) \quad 2. \cos(6x)$$

Exercice 6

- Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'afixe vérifie $\frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.
- Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'afixe vérifie $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 7 Donner une caractérisation simple sur $z \in \mathbb{C}$ pour que le complexe $Z = 1 + iz$ soit réel.

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z = z^2 + z + 1$ soit réel.

Exercice 9 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \frac{1}{\bar{a}}$, on définit $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que $\mathbb{U}$ est stable par f , c'est-à-dire que $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

Pour aller plus loin

Exercice 10 Donner la forme algébrique de $(1 + i)^{125}$ puis de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$.

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les modules de z , $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ soient égaux.

Exercice 12 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$C = \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) = \cos(a) + \cos(a + b) + \cdots + \cos(a + nb)$$

$$S = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb) = \sin(a) + \sin(a + b) + \cdots + \sin(a + nb)$$

- Calculer C et S lorsque $b \in 2\pi\mathbb{Z}$.
- On suppose maintenant que $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$C + iS = e^{i(\frac{nb}{2} + a)} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}b)}{\sin(\frac{b}{2})}.$$

et en déduire C et S .

Rab

Exercice 13 On pose $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Déterminer la forme algébrique de z_3 puis sa forme polaire.
- En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 14

- En utilisant la formule de Moivre, calculer $\sin(\frac{\pi}{5})$.
- Simplifier $\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{5}$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{5})$.
- Déterminer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 15 Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$ en utilisant des formules trigonométriques. En déduire une expression simple de

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^8.$$

Exercice 16 Soit $z \in \mathbb{U}$. Calculer $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$.

Exercice 17 Soit $\theta \neq \pi [2\pi]$. Simplifier $\frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}}$.

Exercice 18 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes.

$$1. \sin^5(x) \quad 2. \cos(x) \cos^2(2x)$$