TD8
Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos^2(x)$
2. $x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$
3. $x \mapsto \cos(x)\,\mathrm{e}^x$
4. $x \mapsto x\sin(x)\,\mathrm{e}^x$

Exercice 3 Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \arctan\left(\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$. *Indication : poser $t = -x$.*

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{0}^{1} \arctan(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}^\pi} \sin\left(\ln(x)\right)\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{x^3+1}{2x^2-6x+4}$
2. $x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)}$ *(poser $u = \tan(x)$)*
3. $x \mapsto \frac{2}{x^2-5x+4}$
4. $x \mapsto x\arctan(x)$
5. $x \mapsto \frac{3}{x^2+x+2}$
6. $x \mapsto x\ln(x)$
7. $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2-6x+9}$
8. $x \mapsto (x+1)\,\mathrm{ch}(x)$
9. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$
10. $x \mapsto \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1}$
11. $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$
12. $x \mapsto \frac{x^3+2x^2+1}{2x^2-2x+2}$

Rab

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$ *(poser $u = \sqrt{\mathrm{e}^x-1}$)*
6. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$ *($u = \sin(x)$)*

Exercice 7 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
2. $x \mapsto \tan(x)$
3. $x \mapsto \frac{x^5}{1+x^{12}}$
4. $x \mapsto \tan^3(x)$
5. $x \mapsto \tan^4(x)$
6. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$
7. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$
8. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$
9. $x \mapsto \left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$
10. $x \mapsto 2x\sin^2(x)\,\mathrm{e}^x$
11. $x \mapsto \sin\left(\ln(x)\right)$

Exercice 8 Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $x \mapsto \ln(x)$
2. $x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$
3. $x \mapsto \left(x^2-x+1\right)\mathrm{e}^x$
4. $x \mapsto x\cos(x)$
5. $x \mapsto x\sin^3(x)$
6. $x \mapsto \arctan(x)$
7. $x \mapsto \cos(x)\,\mathrm{e}^x$
8. $x \mapsto \sin(2x)\,\mathrm{e}^{-x}$
9. $x \mapsto \cos(x)\,\mathrm{ch}(x)$

Exercice 9 A l'aide d'un changement de variables, calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x+x\ln^2(x)}$
2. $x \mapsto \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{ch}^2(x)}$
3. $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ *($u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$)*
4. $x \mapsto \frac{1}{2+\cos(x)}$ *($u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$)*
5. $x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ *($x = \mathrm{sh}(u)$)*
6. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ *($x = 2+\sin(u)$)*

Exercice 10 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{2x^2-6x+4}$
2. $x \mapsto \frac{x+1}{2x^2-6x+4}$
3. $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$
4. $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$
5. $x \mapsto \frac{1}{2x^2-2x+2}$
6. $x \mapsto \frac{x+2}{2x^2-2x+2}$
7. $x \mapsto \frac{1}{2x^2-8x+8}$
8. $x \mapsto \frac{2}{x^2-x-6}$
9. $x \mapsto \frac{1}{2x^2+2x+1}$
10. $x \mapsto \frac{x}{x^2-6x+9}$
11. $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2x-3}$
12. $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3x+1}$
13. $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$
14. $x \mapsto \frac{x^3}{2x^2+2x+1}$