1 Exercices CCP

Exercice 1. *Algèbre.*
On considère la fraction rationnelle
$$R = \frac{X^5 + X^4}{(X-2)^2(X+1)^2}.$$

1. Décomposez R en éléments simples.

2. Déterminez les primitives de la fonction $x \longmapsto R(x)$ sur $]-1, 2[$.

Exercice 2. *Calcul Différentiel.*
Déterminez les extrema locaux et globaux de
$$f(x,y) = y\left(x^2 + (\ln y)^2\right) \qquad \text{sur } \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Exercice 3. *Algèbre.*
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2. Déterminez toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et déduisez-en l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Exercice 4. *Calcul différentiel.*
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle .,. \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrez que, $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \langle f(x), x \rangle > 0.$

2. Soient u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et g l'application définie par :
$$\begin{aligned} g \ : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle. \end{aligned}$$

Montrez que g admet des dérivées partielles selon tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.

3. Montrez que g admet un unique point critique noté z.

4. Montrez que g admet un minimum global en z.

Exercice 5. *Algèbre.*
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
On admet que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose alors $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrez que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 6. *Fonction définie par une intégrale.*

1. Donnez le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2. Calculez l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

3. Expliquez rapidement pourquoi $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrez que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}.$$

Exercice 7. *Algèbre.*
Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X) - P(X-1). \end{aligned}$$

Donnez la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déduisez-en $Im(\phi)$ et $Ker(\phi)$.

Exercice 8. *Suites et séries de fonctions.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit f_n l'application définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2sh(x)}{e^{nx}-1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de α la fonction f_n est-elle continue ?
Dans la suite on prendra cette valeur pour α.

2. Montrez que f_n est bornée.

3. Montrez que $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ existe pour $n \geqslant 2$.

4. Exprimez $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ comme la somme d'une série.

Exercice 9. *Algèbre.*

1. Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.

2. Déduisez-en qu'en dimension finie toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.

3. Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k ont même trace.

Exercice 10. *Complément de calcul intégral.*

1. Esquissez

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant xy \leqslant 2,\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4\right\}.$$

2. On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y > 0\}$ et $V = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2,\ X > 0,\ Y > 0\}$. Montrez que $\phi(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$ est un $\mathscr{C}^1-$difféomorphisme de U sur V.

3. Explicitez $\phi(D)$ et calculez

$$I = \int\int_D f(x, y)dx\,dy \qquad \text{où } f(x, y) = \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}.$$

4. Etudiez les extrêma de f.

Exercice 11. *Analyse.*

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to}{\sim} v_n$. Démontrez que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminez le signe au voisinage de l'infini de $u_n = sh(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n})$.

Exercice 12. *Matrices et déterminants.*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Indiquez des endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$ la famille $(e_1 + e_i, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

3. Déterminez tous les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est diagonale dans toutes les bases de E.

4. Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E ?

Exercice 13. *Analyse.*

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
Démontrez que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

a. Etudiez la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Etudiez la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 14. *Réduction des endomorphismes.*
Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de $u \circ v$, montrer que λ est alors aussi valeur propre de $v \circ u$.

2. Pour $P \in \mathbb{R}[X] = E$, on pose

$$u(P) = P' \qquad \text{et} \qquad v(P) = \int_0^X P(t)dt,$$

ce qui définit des endomorphismes de E. Déterminer $Ker(u \circ v)$ et $Ker(v \circ u)$.

3. Montrez que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$ si l'espace E est de dimension finie.

Exercice 15. *Analyse.*

1. Démontrez que si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

2. Trouvez le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$ (où $i^2 = -1$).

Exercice 16. *Eléments d'algèbre linéaire.*
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = id$.

1. Montrez que $Ker(g \circ f) = Ker(f)$ et $Im(g \circ f) = Im(g)$.

2. Montrez que

$$E = Ker(f) \oplus Im(g).$$

3. Dans quel(s) cas peut-on conclure que $g = f^{-1}$?

4. Calculez $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractérisez $g \circ f$.

Exercice 17. *Analyse.*
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout f dans E :

$$p_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad p_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

1. *a.* Démontrez succinctement que p_∞ et p_1 sont deux normes sur E.

b. Démontrez qu'il existe $k > 0$ tel que , pour tout f de E, $p_1(f) \leqslant k p_\infty(f)$.

c. Démontrez que tout ouvert pour la norme p_1 est un ouvert pour la norme p_∞.

2. Démontrez que les normes p_1 et p_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 18. *Réduction des endomorphismes.*
On considère E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, $U = (u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans une base de E, $e_{i,j}$ les projecteurs de $\mathscr{L}(E)$ associés à cette base et $E_{i,j}$ la matrice de ces projecteurs. On considère φ l'endomorphisme dans $\mathscr{L}(E)$ tel que

$$\varphi(v) = u \circ v.$$

1. Montrez que φ et u ont les mêmes valeurs propres.

2. Calculez $UE_{i,j}$ en fonction de $E_{k,j}$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. En déduire qu'il existe une base de $\mathscr{L}(E)$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale par blocs.

3. Exprimez cette matrice.

Exercice 19. *Analyse.*
On considère la série de fonction $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} x^n$, x désignant un réel.

1. Etudiez la simple convergence de cette série.

2. On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série.

- **a.** Etudiez la convergence normale puis la convergence uniforme de cette série sur D.
- **b.** La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 20. *Endomorphismes des espaces euclidiens.*
Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle ., . \rangle$ et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E \qquad \langle u(x), x \rangle = 0.$$

1. Montrez que $u^* = -u$.

2. Montrez que l'image et le noyau de u sont supplémentaires.

3. Montrez que le rang de u est pair.

2 Exercices Mines-Centrale

Exercice 21. *Intérieur d'une classe de similitude.*
Soit $M \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 2$. Montrez que la classe de similitude de M, définie par :

$$Sim(M) = \{PMP^{-1},\ P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

est d'intérieur vide.

Exercice 22. *Terme général intégral.*
Soient f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^1 f(x)x^n dx.$$

1. Montrez que si $\sum u_n$ converge alors $f(1) = 0$.
2. On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
   Montrez que $\sum u_n$ converge si et seulement si $f(1) = 0$. Exprimez dans ce cas la somme à l'aide d'une intégrale.
3. On suppose ici que $\forall x \in]0,1] \quad f(x) = x\ln(x)$. Justifiez que f est prolongeable par continuité en 0, donnez alors la valeur de $f(0)$ puis calculez

$$\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x} dx.$$

Exercice 23. *Comparaison de rayons de convergence.*
Comparez les rayons de convergence de $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n a_n^2 z^n$.

Exercice 24. *Déterminant tridiagonal.*
Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, calculez le déterminant tridiagonal d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_n(\varphi) = \begin{vmatrix} 2ch(\varphi) & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2ch(\varphi) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2ch(\varphi) & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 2ch(\varphi) & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2ch(\varphi) \end{vmatrix}.$$

Exercice 25. *Transformation d'Abel (sommation par parties).*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complexes telles que :

(i) $\displaystyle\sum_{N\in\mathbb{N}^*} |u_{n+1} - u_n|$ converge et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ est bornée.

1. Justifier que l'on a (i) si par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en décroissant.

2. Montrer que la série $\sum_k u_k v_k$ est convergente.

Exercice 26. *Utilisation des matrices de rang 1.*
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \geqslant 2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $I_n + \lambda H$ soit inversible.

2. Calculez alors son inverse en fonction de H.

Exercice 27. *Une majoration sur les complexes.*
Soient (α, β, x, y) dans $(\mathbb{R}_+^*)^4$. On suppose $\alpha < \beta$ et on pose $z = x + iy$. Prouvez que

$$\left|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right| \leqslant \frac{|z|}{x}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right).$$

Exercice 28. *Polynôme de Legendre.*
Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par :

$$L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1. Prouvez que $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$. En déduire la parité de L_n et l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Soit Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_n(X) = (X^2-1)^n$ et $0 \leqslant j \leqslant n$ montrez que $U_n^{(j)}$ possède au moins j racines distinctes dans $]-1, 1[$. En déduire que $L_n(X)$ est scindé à à racines simples dans $]-1, 1[$.

3. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2-1)L_n''(X) + 2XL_n'(X) = n(n+1)L_n(X)$.

Exercice 29. *Calul d'une intégrale impropre.*
Soit $a > 0$, on définit :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) dx.$$

1. Justifiez la convergence de $I(a)$.

2. Montrez que

$$I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx.$$

Et en déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 30. *Calul de l'intégrale de Gauss.*
Soit

$$f : \quad x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-x(1+t^2)\right)}{1+t^2} dt.$$

1. Donnez l'ensemble de définition de f.

2. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

3. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 31. *Fonction faiblement contractante.*
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f : K \to K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K,\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Démontrez que f possède un unique point fixe, noté l.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $x_0 \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

3. La première question reste-t-elle vrai si l'on remplace «compact» par «fermé» ?

Exercice 32. *Intégrabilité d'une somme.*
Montrer la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1 + xn + n^2)}{1 + n^2 e^x} dx.$$

3 Nouvelle Session

Exercice 33. *Algèbre.*

E désigne un espace euclidien. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et de y.

1. **a.** Si u est un endomorphisme de E, précisez, en justifiant votre réponse, l'endomorphisme $(u^*)^*$.

   b. Si u et v sont deux endomorphismes de E, précisez, en justifiant votre réponse, l'endomorphisme $(u \circ v)^*$.

2. **a.** Soit (e_i) une base orthonormale de E. On note A la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base (e_i) et B la matrice de u^* dans la base (e_i). En justifiant votre réponse, donnez la relation qui existe entre A et B.

   b. Retrouver le résultat de la question **1.a.** à l'aide de la question précédente.

Exercice 34. *Séries entières.*

1. Trouvez le rayon de convergence de
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{sh(n)}{n(n+1)} x^n.$$
2. Calculez la somme dans le bon intervalle.

Exercice 35. *Algèbre.*

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

1. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
2. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 36. *Séries numériques.*

1. Déterminez la limite de la suite définie par
$$u_0 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$
2. Déterminez la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = nu_n$.
3. Donnez la nature de la série $\sum_n u_n$ et celle de la série $\sum_n (-1)^n u_n$.

Exercice 37. *Algèbre.*

1. Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.
2. Déduisez-en qu'en dimension finie toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.
3. Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k ont même trace.

Exercice 38. *Espaces normés.*
On munit $E = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme
$$\|M\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant p} |m_{i,j}| \,.$$

1. Soient X un vecteur fixé dans $\mathbb{C}^p$ et P une matrice fixée dans $GL_n(\mathbb{C})$. Montrez que
$$\phi(M) = MX \qquad \text{et} \qquad \varphi(M) = P^{-1}MP$$
définissent des applications continues.

2. Montrez que $f(M, N) = MN$ définit une application continue.

3. Soit $A \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\|A^n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrez que les valeurs propres de A sont de modules inférieurs ou égaux à 1.

4. Soit $A \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ telle que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers une matrice C. Montrez que $C^2 = C$. Que conclure à propos du spectre de C ?
Montrez que les valeurs propres de B sont de module au plus égaux à 1.

Exercice 39. *Analyse.*
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrez que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes.

P2 f est continue sur E
P2 f est continue en 0
P2 $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant k \|x\|$

2. Soit E l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| .$$

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Démontrez que φ est linéaire et continue.

Exercice 40. *Réduction des endomorphismes.*
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 comme racine simple et tel que $P(u) = 0$.

1. Montrez que

$$Ker(u^2) = Ker(u) \qquad \text{et} \qquad Im(u^2) = Im(u).$$

2. Déduisez-en que

$$E = Ker(u) \oplus Im(u).$$

Exercice 41. *Analyse.*

1. Donnez l'idée de la démonstration de la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions.

2. On pose pour $x > -1$,

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}.$$

Calculez $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 42. *Endomorphismes des espaces euclidiens.*
Soit u un endomorphisme orthogonal de E, espace euclidien et $v = u - id$.

1. Montrez que $Ker(u) = (Im(v))^{\perp}$.

2. Soit

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Montrez que $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge, pour tout vecteur x, vers le projeté orthogonal de x sur $Ker(v)$.