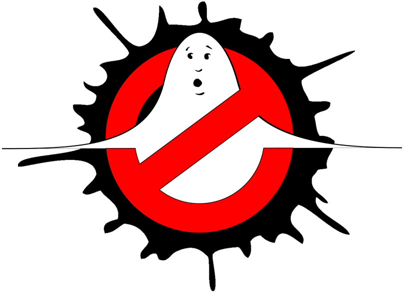
Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

Ronan LAUVERGNAT
Université de Bretagne Sud



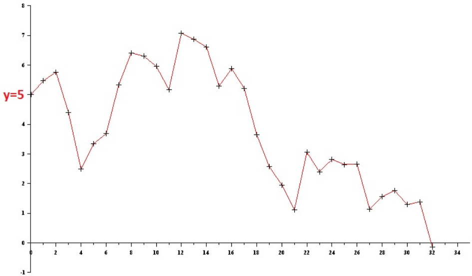
Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

On se propose d'étudier une population de grenouilles.

- Soit $y > 0$ le nombre initial de grenouilles.
- Soit X_n la variable aléatoire réelle représentant l'accroissement de la population l'année n.

Le nombre total de grenouilles l'année n est alors notée

$$\begin{aligned} y + S_n &:= y + X_1 + \cdots + X_{n-1} + X_n \\ &= y + S_{n-1} + X_n. \end{aligned}$$



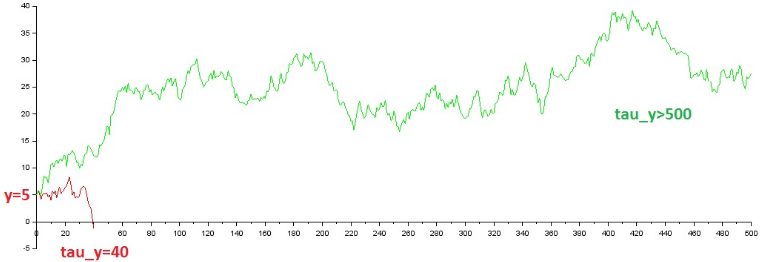
Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

Puisque l'on souhaite décrire une population qui ne s'éteint pas, on considère le temps d'arrêt

$$\tau_y := \min \{k \in \mathbb{N}^*,\ y + S_k \leqslant 0\}.$$

Le fait que la population ait survécu jusqu'à l'instant n s'écrit

$$\{y + S_1 > 0,\ y + S_2 > 0,\ \ldots,\ y + S_n > 0\} = \{\tau_y > n\}.$$



Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

On souhaite déterminer

- d'une part la probabilité que la population survive :

$$\mathbb{P}\left(\tau_y > n\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ???,$$

- et d'autre part la loi du nombre de grenouilles sachant que la population a survécue :

$$\mathscr{L}\left(\frac{y + S_n}{\sigma\sqrt{n}} \,\middle|\, \tau_y > n \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ???.$$

Théorèmes limites pour une marche ~~Markovienne~~ conditionnée à rester positive, cas indépendant

On suppose les accroissements $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. avec un moment d'ordre 2 :

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) < +\infty.$$

On suppose également la marche sans dérive :

$$\mathbb{E}(X_1) = 0.$$

Théorèmes limites pour une marche ~~Markovienne~~ conditionnée à rester positive, cas indépendant

On suppose les accroissements $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. avec un moment d'ordre 2 :

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) < +\infty.$$

On suppose également la marche sans dérive :

$$\mathbb{E}(X_1) = 0.$$

Théorème (temps de sortie) [Spitzer, 1960]

Pour tout $y > 0$, il existe une constante $V(y) > 0$ telle que

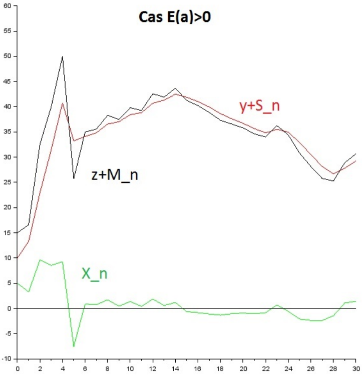
$$\mathbb{P}(\tau_y > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2V(y)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$$

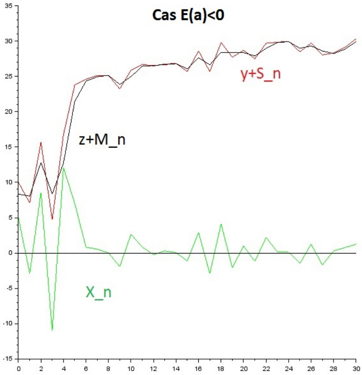
Théorème (loi limite de la marche conditionnée) [Iglehart, 1974]

Pour tout $y > 0$ et $t > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{y+S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y > n\right) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{(loi de Rayleigh).}$$

Comportement relatif de la marche et de la martingale

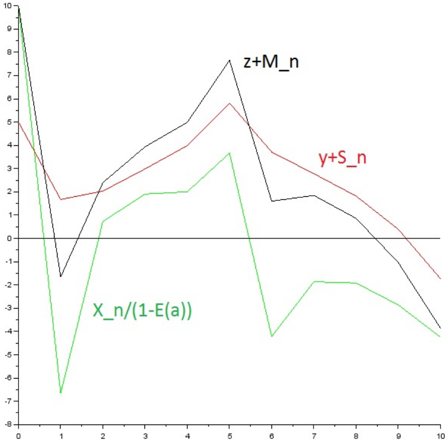




$$X_{n+1} = a_{n+1}X_n + b_{n+1}, \quad y + S_n = y + X_1 + \cdots + X_n$$

$$z + M_n = y + S_n + \frac{\mathbb{E}(a)}{1 - \mathbb{E}(a)} X_n$$

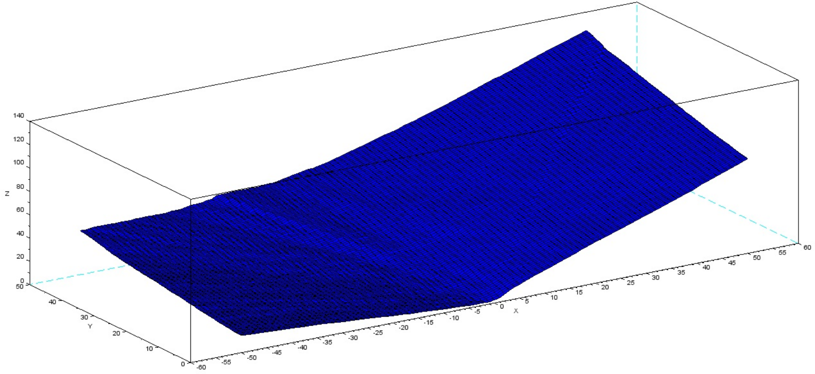
Comportement de la martingale à la sortie



$$X_{n+1} = a_{n+1}X_n + b_{n+1}, \quad y + S_n = y + X_1 + \cdots + X_n$$

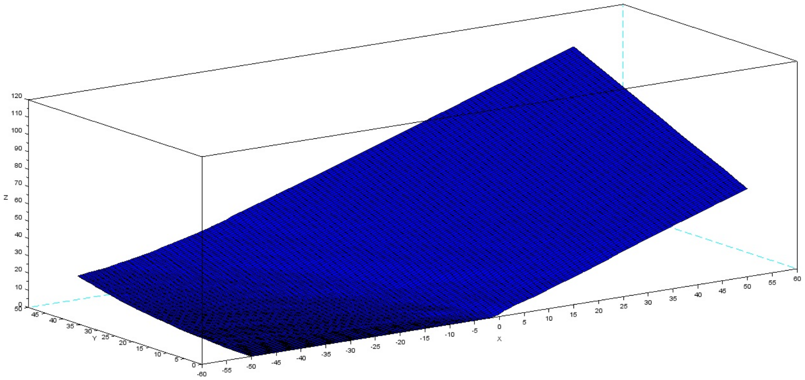
$$z + M_n = y + S_n + \frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)}X_n$$

La fonction harmonique



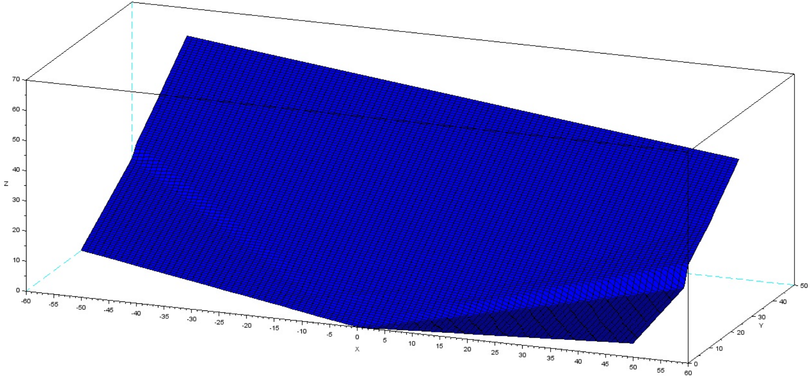
$$a \sim \mathcal{N}(0.5, 0.8) \qquad \text{et} \qquad b \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

La fonction harmonique



$$a \sim \mathscr{U}([0,1]) \qquad \text{et} \qquad b \sim \mathscr{E}(1/2) - \mathscr{E}(1/2) = \mathscr{L}(0, 1/2)$$

La fonction harmonique



$$a \sim \frac{3}{4}\delta_{\left\{-\frac{1}{2}\right\}} + \frac{1}{4}\delta_{\left\{\frac{1}{2}\right\}} \qquad \text{et} \qquad b \sim \mathscr{U}([-1,\, 1])$$

L'exemple brownien

On pose

$$\tau_y^{bm} = \min\{t \geqslant 0,\ y + \sigma B_t \leqslant 0\},$$

Proposition [Lévy, 1954]

Pour tout $y > 0$ et $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left(\tau_y^{bm} > n\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n\sigma}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2n\sigma^2}}\, dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2y}{\sqrt{2\pi n\sigma}}.$$

Pour tout $y > 0$, $n \geqslant 1$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{y + \sigma B_n}{\sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y^{bm} > n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Approximation de la marche par le mouvement Brownien

Théorème [Grama, Le Page, Peigné, 2014]

Pour tout $p \in]2;\alpha[$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}_x \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| S_{[nt]} - \sigma B_{nt} \right| > n^{1/2-\epsilon} \right) \leqslant \frac{c_{p,\epsilon} \left(1 + |x|^p \right)}{n^\epsilon}.$$

- A nouveau lorsque le point de départ $y > n^{1/2-\epsilon}$, on est capable d'approcher la marche par le Brownien.
- Lorsque y est quelconque, on se place par la propriété de Markov au temps
$$\nu_n := \min\{k \geqslant 1, \ |y + S_k| > n^{1/2-\epsilon}\}.$$

Les théorèmes limites

Théorème (temps de sortie)

Il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

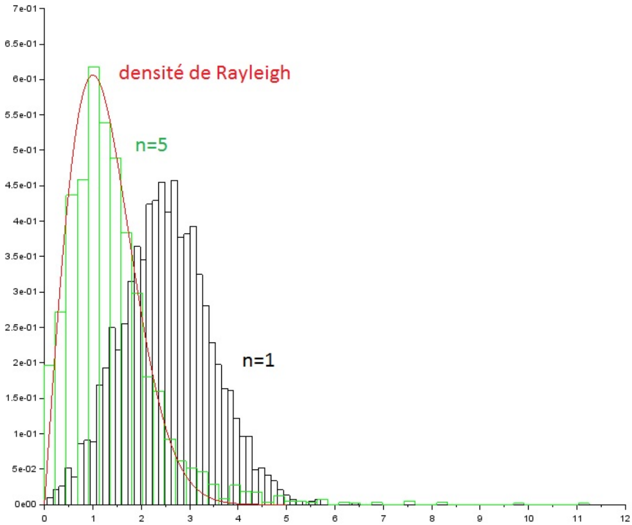
$$\mathbb{P}_x(\tau_y > n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2V(x,y)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}.$$

Théorème (loi limite de la marche conditionnée)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y > 0$ et tout $t > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x\left(\frac{y + S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y > n \right) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{(loi de Rayleigh)}.$$

La densité de Rayleigh



IGLEHART, D. (1974). Functional Central Limit Theorems for Random Walks Conditioned to Stay Positive. The Annals of Probability.

DENISOV, D. AND WACHTEL, V. (2010). Conditional limit theorems for ordered random walks. Electron. J. Probab.

GUIVARC'H, Y. AND LE PAGE, E. (2008). On spectral properties of a family of transfer operators and convergence to stable laws for affine random walks. Ergodic Theory and Dynamical Systems.

GRAMA, I., LE PAGE, E. AND PEIGNÉ, M. (2014). On the rate of convergence in the weak invariance principle for dependant random variables with applications to Markov chains. Colloquim Mathematicum.

Perspectives

- Travailler la dimension supérieure, avec A_{n+1} et B_{n+1} des matrices aléatoires,

$$X_{n+1} = A_{n+1} X_n + B_{n+1}.$$

- Généraliser à toutes chaînes de Markov possédant une décroissance exponentielle en moyenne,

$$\mathbb{E}_x \left(|f(X_n)| \right) \leqslant \mathrm{e}^{-cn} N(x) + c.$$

Merci !