Des théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

Ronan LAUVERGNAT
Université de Bretagne Sud
encadré par le Professeur Ion GRAMA

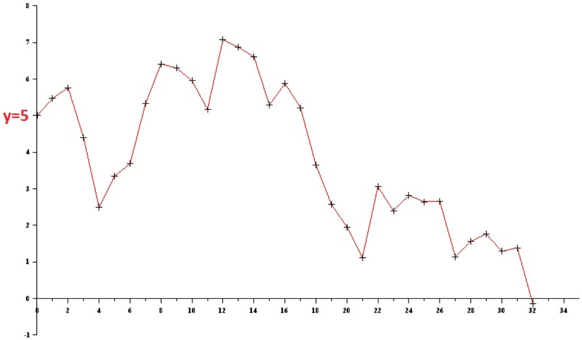
Journées des probabilités 2015

Présentation de la marche

On désire observer l'évolution d'une population au cours du temps.

- Le point $y > 0$ représente la population initiale.
- On note X_k l'accroissement de la population durant la $k^{\text{ième}}$ année.
- La population totale au temps n est donc

$$y + S_n = y + X_1 + \cdots + X_n.$$



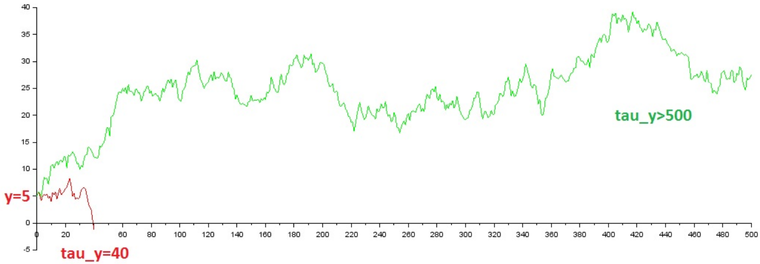
Présentation du temps de sortie

On s'intéresse au premier temps où la population s'éteint :

$$\tau_y := \min\{k \geqslant 1,\ y + S_k \leqslant 0\}.$$

On cherche également à étudier la population sachant qu'elle a survécu : on regarde $y + S_n$ contre l'événement

$$\{\tau_y > n\} = \{y + S_1 > 0,\ y + S_2 > 0, \dots, y + S_n > 0\}.$$



Résultats dans le cas i.i.d.

On suppose les accroissements $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. et

$$\mathbb{E}(X_1) = 0, \qquad \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \sigma^2 > 0.$$

Théorème (temps de sortie) [Spitzer, 1960]

Pour tout $y > 0$, il existe une constante $V(y)$ telle que

$$\mathbb{P}(\tau_y > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2V(y)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$$

Théorème (loi limite de la marche conditionnée) [Iglehart, 1974]

Pour tout $y > 0$ et $t > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{y+S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t \mid \tau_y > n\right) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{(loi de Rayleigh).}$$

La récursion stochastique

On ne suppose plus les accroissements indépendants mais définis par récurrence par une transformation affine. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = a_{n+1} X_n + b_{n+1},$$

avec les $(a_n, b_n)_{n \geqslant 1}$ i.i.d.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et $y + S_n = y + X_1 + \cdots + X_n$ est alors ce que l'on appellera une marche Markovienne.

On notera $x \in \mathbb{R}$ le point de départ de cette chaîne de Markov et $\mathbb{P}_x$ (resp. $\mathbb{E}_x$) la probabilité (resp. l'espérance) sachant

$$X_0 = x \quad p.s.$$

La marche non conditionnée

On impose quelques hypothèses dont la suivante.

Condition de contraction

On suppose qu'il existe $\alpha > 2$ tel que,

$$\mathbb{E}\left(|a_1|^\alpha\right) < 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(|b_1|^\alpha\right) < +\infty.$$

Théorème limite sans conditionnement [Guivarc'h, Le Page, 2008]

- La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une unique mesure invariante qui est la loi de $\sum_{k=1}^{+\infty} a_1 \dots a_k b_{k+1}$.
- Avec $\mathbb{E}(b_1) = 0$, la marche renormalisée converge en loi vers la loi normale centrée réduite. Il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout $y > 0$, tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x\left(\frac{y+S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\, \mathrm{d}s.$$

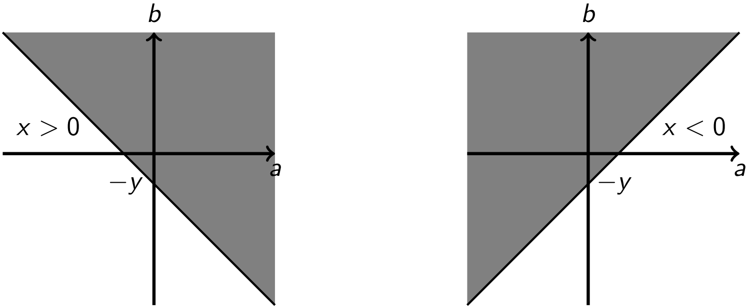
Hypothèse de positivité

On suppose que $\mathbb{P}(b_1 \neq 0) > 0$ et $\mathbb{E}(a_1) \geqslant 0$.

Condition de positivité

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$, la probabilité que la population survive un an est strictement positive

$$\mathbb{P}\left(y + S_1 = y + X_1 = y + a_1 x + b_1 > 0\right) > 0.$$



Le noyau tronqué

- On définit $\mathbf{Q}(x, y, \cdot)$ le noyau de transition de la chaîne de Markov $(X_n, y + S_n)_{n \geqslant 0}$.

- Afin de ne considérer que les trajectoires positives, on considère la restriction de $\mathbf{Q}(x, y, \cdot)$ aux ensembles mesurables de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbf{Q}_+(x, y, .) := \mathbf{Q}(x, y, .)|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*}.$$

- Cette mesure n'étant plus une probabilité, $\mathbf{Q}_+(x, y, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) < 1$, il faut renormaliser $\mathbf{Q}_+$.

La fonction harmonique

Définition

On dit qu'une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_+ V(x, y) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x', y')\mathbf{Q}_+(x, y, \mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y') \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x', y')\mathbb{P}_x\left(X_1 \in \mathrm{d}x' \,;\, y + S_1 \in \mathrm{d}y'\right) \\
&= V(x, y).
\end{aligned}$$

Si de plus l'on suppose $V > 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on définit $\overline{\mathbf{Q}}_+(x, y, .)$ par, pour tout B Borélien de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{Q}}_+(x, y, B) &:= \frac{1}{V(x, y)}(\mathbf{Q}_+ V)(x, y, B) \\
&= \frac{1}{V(x, y)} \int_B V(x', y')\mathbf{Q}_+(x, y, \mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y').
\end{aligned}$$

La fonction harmonique

Définition

On dit qu'une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_+ V(x,y) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbf{Q}_+(x,y,\mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y') \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbb{P}_x\left(X_1 \in \mathrm{d}x' \,;\, y + S_1 \in \mathrm{d}y'\right) \\ &= V(x,y). \end{aligned}$$

L'opérateur $\overline{\mathbf{Q}}_+$ est alors bien un noyau Markovien,

$$\overline{\mathbf{Q}}_+(x,y,\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*) = \frac{1}{V(x,y)} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbf{Q}_+(x,y,\mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y') = 1.$$

Existence d'une fonction harmonique

Théorème (Existence d'une fonction harmonique)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$, la limite suivante existe et est finie,
$$V(x,y) := \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x \left(y + S_n \,;\, \tau_y > n \right) < +\infty.$$
2. La fonction V est $\mathbf{Q}_+$-harmonique.
3. La fonction V est strictement positive sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Preuve de l'invariance

$$\mathbb{E}_x \left(y + S_{n+1} \,;\, \tau_y > n+1 \right) = \mathbb{E}_x \left(\mathbb{E} \left(y + S_{n+1} \,;\, \tau_y > n+1 \,\middle|\, \mathscr{F}_1 \right) \right).$$

Par la propriété de Markov, en notant $x' = X_1$, $y' = y + S_1$,

$$\mathbb{E}_x \left(y + S_{n+1} \,;\, \tau_y > n+1 \right) = \mathbb{E}_x \left(\mathbb{E}_{x'} \left(y' + S_n' \,;\, \tau_{y'} > n \right) \,;\, \tau_y > 1 \right).$$

Sous réserve d'avoir une hypothèse de domination, par passage à la limite on obtient

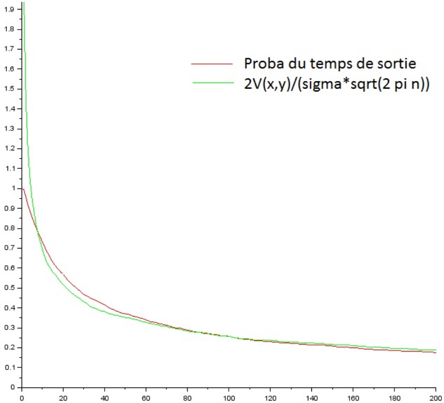
$$V(x,y) = \mathbb{E}_x \left(V(x',y') \,;\, \tau_y > 1 \right).$$

Asymptotique du temps de sortie

Théorème (temps de sortie)

Il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

$$\mathbb{P}_x(\tau_y > n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2V(x,y)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}.$$

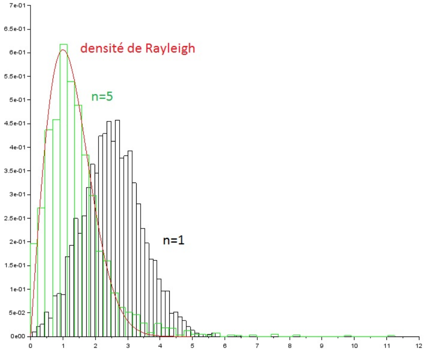


Loi asymptotique de la marche conditionnée

Théorème (loi limite de la marche conditionnée)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y > 0$ et tout $t > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x \left(\frac{y + S_n}{\sigma \sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y > n \right) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{(loi de Rayleigh).}$$



Approximation par une martingale

On définit un nouveau point de départ,

$$z := y + \frac{\mathbb{E}(a)}{1 - \mathbb{E}(a)} x,$$

ainsi qu'un nouveau processus issu de z défini par,

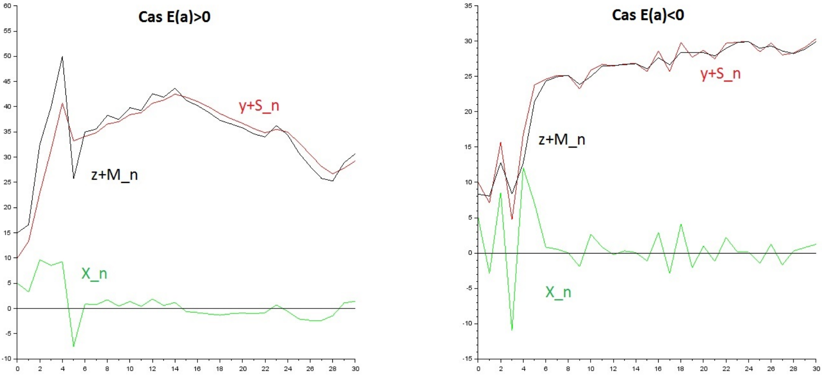
$$z + M_n := y + S_n + \frac{\mathbb{E}(a)}{1 - \mathbb{E}(a)} X_n \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Lemme

- Le processus $(z + M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale de moyenne z.
- Sous réserve que l'une des deux limites existe,

$$V(x, y) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x \left(z + M_n \, ; \, \tau_y > n \right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x \left(y + S_n \, ; \, \tau_y > n \right).$$

Comparaison de la marche et de la martingale



$$X_{n+1} = a_{n+1}X_n + b_{n+1}, \quad y + S_n = y + X_1 + \cdots + X_n$$

$$z + M_n = y + S_n + \frac{\mathbb{E}(a)}{1 - \mathbb{E}(a)} X_n$$

Réduction du temps de n à τ_y

Objectif

Il nous faut montrer que la martingale tronquée est contrôlée par un majorant indépendant de n,

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right) \leqslant C(x,y).$$

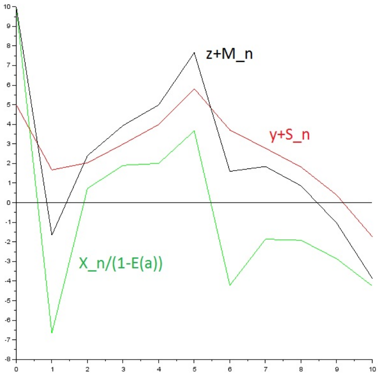
Par la propriété de martingale, on ramène le processus au temps de sortie τ_y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right) &= \mathbb{E}_x\left(z + M_n\right) - \mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y \leqslant n\right) \\
&= z - \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}\left(z + M_n\,;\, \tau_y \leqslant n \,\middle|\, \mathscr{F}_{\tau_y}\right)\right) \\
&= z - \mathbb{E}_x\left(z + M_{\tau_y}\,;\, \tau_y \leqslant n\right).
\end{aligned}$$

Contrôle de la martingale en τ_y

Au temps τ_y, nous avons,

$$\begin{aligned} z + M_{\tau_y} &= y + S_{\tau_y} + \frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)} X_{\tau_y} < 0 \\ &= y + S_{\tau_y - 1} + \frac{1}{1-\mathbb{E}(a)} X_{\tau_y} > \frac{1}{1-\mathbb{E}(a)} X_{\tau_y}. \end{aligned}$$



Un premier majorant

Ainsi,

$$\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right)\leqslant z+\frac{1}{1-\mathbb{E}(a)}\mathbb{E}_x\left(\left|X_{\tau_y}\right|\,;\,\tau_y\leqslant n\right).$$

Lemme

Pour tout $\epsilon>0$ assez petit et tout $2<p<\alpha$ il existe $c_p>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, tout $y>0$ et tout $n\geqslant 1$,

$$\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right)\leqslant z+c_p\left(1+|x|^p\right)n^{1/2-2\epsilon}.$$

Si l'on imagine $z>n^{1/2}$ très grand, on trouve immédiatement,

$$\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right)\leqslant c_p\left(1+|x|^p\right)z=c_p\left(1+|x|^p\right)\left(y+\frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)}x\right).$$

Attendre le bon point de départ

Puisque z n'est pas toujours plus grand que $n^{1/2-\epsilon}$, il suffit d'attendre que le processus croisse suffisamment,

$$\nu_n = \nu_{n,\epsilon,x,y} := \min\left\{k \geqslant 1,\ |z + M_k| > n^{1/2-\epsilon}\right\}.$$

Ce temps d'arrêt est atteint suffisamment vite,

$$\mathbb{P}_x\left(\nu_n > n^{1-\epsilon}\right) \leqslant c_{p,\epsilon}\frac{(1+|x|)^p}{n^{p/2-c_p\epsilon}}.$$

Par la propriété de Markov on se ramène à ν_n,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right)\\
&\quad\leqslant \mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\,;\, \nu_n \leqslant n^{1-\epsilon}\right) + c_{p,\epsilon}\frac{(1+y+|x|)\,(1+|x|)^{p-1}}{n^{\epsilon}}\\
&\quad= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_{X_{\nu_n}}\left(z' + M_{n-\nu_n}\,;\, \tau_{y'} > n-\nu_n\right)\,;\, \tau_y > \nu_n\,;\, \nu_n \leqslant n^{1-\epsilon}\right)\\
&\qquad\quad + c_{p,\epsilon}\frac{(1+y+|x|)\,(1+|x|)^{p-1}}{n^{\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Utiliser le premier majorant

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right)\\
&\quad\leqslant \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_{X_{\nu_n}}\left(z'+M_{n-\nu_n}\,;\,\tau_{y'}>n-\nu_n\right)\,;\,\tau_y>\nu_n\,;\,\nu_n\leqslant n^{1-\epsilon}\right)\\
&\qquad + c_{p,\epsilon}\frac{\left(1+y+|x|\right)\left(1+|x|\right)^{p-1}}{n^{\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Par le lemme précédent,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right)\\
&\quad\leqslant \mathbb{E}_x\left(z'+\left(1+|x'|^p\right)\left(n-\nu_n\right)^{1/2-2\epsilon}\,;\,\tau_y>\nu_n\,;\,\nu_n\leqslant n^{1-\epsilon}\right)\\
&\qquad + c_{p,\epsilon}\frac{\left(1+y+|x|\right)\left(1+|x|\right)^{p-1}}{n^{\epsilon}}\\
&\quad\leqslant \left(1+\frac{c_p}{n^{\epsilon}}\right)\mathbb{E}_x\left(z+M_{\nu_n}\,;\,\tau_y>\nu_n\,;\,\nu_n\leqslant n^{1-\epsilon}\right)+R_n,
\end{aligned}$$

où R_n est un terme reste.

Revenir à $n^{1-\epsilon}$

$$\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right) \leqslant \left(1+\frac{c_p}{n^\epsilon}\right)\mathbb{E}_x\left(z+M_{\nu_n}\,;\,\tau_y>\nu_n\,;\,\nu_n\leqslant n^{1-\epsilon}\right)+R_n.$$

Maintenant on sait que $\left((z+M_n)\mathbb{1}_{\{\tau_y>n\}}\right)_{n\geqslant 1}$ est une sous-martingale. On élimine alors ν_n en revenant à $n^{1-\epsilon}$,

$$\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right) \leqslant \left(1+\frac{c_p}{n^\epsilon}\right)\mathbb{E}_x\left(z+M_{n^{1-\epsilon}}\,;\,\tau_y>n^{1-\epsilon}\right)+R_n.$$

Par itérations,

$$\mathbb{E}_x\left(z+M_n\,;\,\tau_y>n\right) \leqslant A\,\mathbb{E}_x\left(z+M_{n_0}\,;\,\tau_y>n_0\right)+B.$$

Existence de la fonction harmonique

Proposition

Pour tout $2 < p < \alpha$ il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y > 0$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\,\tau_y > n\right) \leqslant c_p\left(1 + y + |x|\right)\left(1 + |x|\right)^{p-1},$$

Par un théorème de convergence monotone puis dominé, on montre ainsi que

$$V(x,y) = -\mathbb{E}_x\left(M_{\tau_y}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\,\tau_y > n\right)$$

existe.

Cas de la récursion stochastique

La difficulté dans le cas de la récursion stochastique vient du terme reste,

$$R_n = \mathbb{E}_x \left(|X_{\nu_n}|^p \; ; \tau_y > \nu_n \, ; \nu_n \leqslant n^{1-\epsilon} \right),$$

qui n'admet pas de majorant simple a priori.

Décroissance exponentielle de la mémoire du passé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left(|X_n| \right) &\leqslant \left(\mathbb{E} \left(|a| \right) \right)^n |x| + \frac{\mathbb{E} \left(|b| \right)}{1 - \mathbb{E} \left(|a| \right)} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-cn} |x| + c \end{aligned}$$

L'idée est donc de remplacer dans la preuve ν_n par $\nu_n + n^{\epsilon}$ où $\epsilon > 0$ est suffisamment petit.

Les résultats pour le mouvement Brownien

On pose

$$\tau_y^{bm} = \min\{t \geqslant 0,\ y + \sigma B_t \leqslant 0\},$$

Proposition (temps de sortie) [Lévy, 1954]

Pour tout $y > 0$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left(\tau_y^{bm} > n\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2n\sigma^2}} dt.$$

Notamment,

$$\mathbb{P}\left(\tau_y^{bm} > n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2y}{\sqrt{2\pi n}\sigma}.$$

Les résultats pour le mouvement Brownien

On pose
$$\tau_y^{bm} = \min\{t \geqslant 0,\ y + \sigma B_t \leqslant 0\},$$

Proposition (loi limite conditionnelle) [Lévy, 1954]

Pour tout $y > 0$, tout $n \geqslant 1$ et tout $t > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\frac{y+\sigma B_n}{\sqrt{n}} \leqslant t\,;\, \tau_y^{bm} > n\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma}\int_0^{t\sqrt{n}} e^{-\frac{(s-y)^2}{2n\sigma^2}} - e^{-\frac{(s+y)^2}{2n\sigma^2}}\, ds.$$

Notamment,
$$\mathbb{P}\left(\frac{y+\sigma B_n}{\sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y^{bm} > n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Approximation de la marche par le mouvement Brownien

Théorème [Grama, Le Page, Peigné, 2014]

Pour tout $\alpha > p > 2$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tout $\epsilon > 0$ assez petit et tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}_x\left(\sup_{1\geqslant k\geqslant n} |S_k - \sigma B_k| > n^{1/2-\epsilon}\right) \leqslant \frac{c_{p,\epsilon}\left(1+|x|^p\right)}{n^\delta}.$$

On pose

$$n_\epsilon = n - \nu_n - n^{\epsilon/6} \qquad \text{et} \qquad A_{n_\epsilon} = \left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n_\epsilon} |S_k - \sigma B_k| \leqslant n_\epsilon^{1/2-2\epsilon}\right\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\left(\tau_y > n\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{P}_{x'}\left(\tau_{y'} > n_\epsilon\,,\, A_{n_\epsilon}\right)\,;\, \tau_y > \nu_n + n^{\epsilon/6}\,;\, \nu_n \leqslant n^{1-\epsilon}\right) \\
&\ +\mathbb{E}_x\left(\mathbb{P}_{x'}\left(\tau_{y'} > n_\epsilon\,,\, \overline{A_{n_\epsilon}}\right)\,;\, \tau_y > \nu_n + n^{\epsilon/6}\,;\, \nu_n \leqslant n^{1-\epsilon}\right) \\
&\ +\mathbb{P}_x\left(\tau_y > n\,;\, \nu_n > n^{1-\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Approximation de la marche par le mouvement Brownien

Théorème [Grama, Le Page, Peigné, 2014]

Pour tout $\alpha > p > 2$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tout $\epsilon > 0$ assez petit et tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}_x \left(\sup_{1 \geqslant k \geqslant n} |S_k - \sigma B_k| > n^{1/2-\epsilon} \right) \leqslant \frac{c_{p,\epsilon}\left(1 + |x|^p\right)}{n^\delta}.$$

On pose

$$n_\epsilon = n - \nu_n - n^{\epsilon/6} \qquad \text{et} \qquad A_{n_\epsilon} = \left\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant n_\epsilon} |S_k - \sigma B_k| \leqslant n_\epsilon^{1/2-2\epsilon} \right\}.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x(\tau_y > n) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma}(1 + o(1))\,\mathbb{E}_x\left(y + S_{\nu_n} ; \tau_y > \nu_n ; \nu_n \leqslant n^{1-\epsilon}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{2V(x,y)}{\sqrt{2\pi n}\sigma} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Conclusion

Théorème (temps de sortie)

Il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

$$\mathbb{P}_x(\tau_y > n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2V(x,y)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}.$$

Théorème (loi limite de la marche conditionnée)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y > 0$ et tout $t > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x\left(\frac{y + S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y > n \right) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{(loi de Rayleigh).}$$

Perspectives

- Positivité de V dans le cas où $\mathbb{E}(a) < 0$.
- Théorème fonctionnel, type Donsker : l'interpolation de la marche ramenée à l'intervalle $[0,1]$, $\mathbf{S}_n(t) = \frac{y+S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}$, converge en loi vers le méandre brownien.
- Théorème local, type Stone,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x \left(\frac{y+S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in [t, t+h] \,\middle|\, \tau_y > n \right) \underset{h\to 0}{=} hp(t) + o(h).$$

- Travailler la dimension supérieure, avec A_{n+1} et B_{n+1} des matrices aléatoires,

$$X_{n+1} = A_{n+1} X_n + B_{n+1}.$$

- Généraliser à d'autres marches Markoviennes possédant la propriété de décroissance exponentielle en moyenne,

$$\mathbb{E}_x^{1/p} \left(|X_n|^p \right) \leqslant \mathrm{e}^{-c_p n} |x| + c_p.$$

Merci !

JP2015
Toulouse

- DENISOV, D. AND WACHTEL, V. (2010). Conditional limit theorems for ordered random walks. *Electron. J. Probab.*
- GRAMA, I., LE PAGE, E. AND PEIGNÉ, M. (2014). On the rate of convergence in the weak invariance principle for dependant random variables with applications to Markov chains. *Colloquim Mathematicum.*
- GUIVARC'H, Y. AND LE PAGE, E. (2008). On spectral properties of a family of transfer operators and convergence to stable laws for affine random walks. *Ergodic Theory and Dynamical Systems.*
- IGLEHART, D. (1974). Functional Central Limit Theorems for Random Walks Conditioned to Stay Positive. *The Annals of Probability.*
- LÉVY, P. (1954). Théorie de l'addition des variables aléatoires. *Gauthier-Villars, Paris.*