Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

Ronan LAUVERGNAT
Université de Bretagne Sud

NANTES
28-30 OCTOBRE 2015
RENCONTRES DOCTORALES
LEBESGUE
PARRAINS
LUC HILLAIRET (ORLÉANS)
RODOLPHE TURPAULT (BORDEAUX)
ANNE VAUGON (ORSAY)

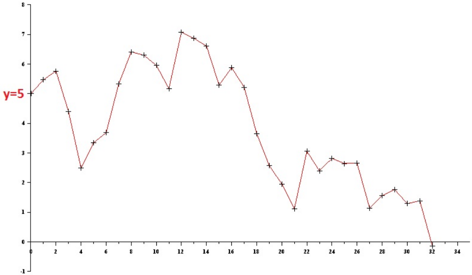
Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

On se propose d'étudier une population de grenouilles.

- Soit $y > 0$ le nombre initial de grenouilles.
- Soit X_n la variable aléatoire réelle représentant l'accroissement de la population l'année n.

Le nombre total de grenouilles l'année n est alors notée

$$\begin{aligned} y + S_n &:= y + X_1 + \cdots + X_{n-1} + X_n \\ &= y + S_{n-1} + X_n. \end{aligned}$$



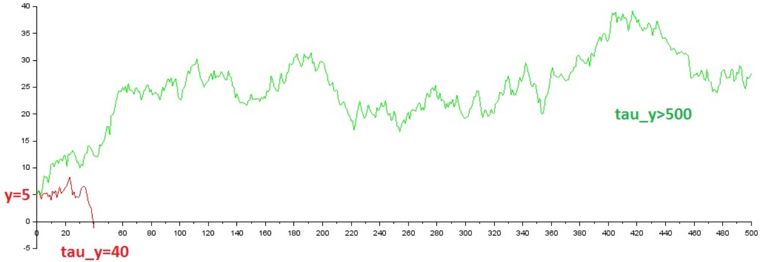
Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

Puisque l'on souhaite décrire une population qui ne s'éteint pas, on considère le temps d'arrêt

$$\tau_y := \min\left\{k \in \mathbb{N}^*,\, y + S_k \leqslant 0\right\}.$$

Le fait que la population ait survécu jusqu'à l'instant n s'écrit

$$\{y + S_1 > 0,\, y + S_2 > 0,\, \ldots,\, y + S_n > 0\} = \{\tau_y > n\}.$$



Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

On souhaite déterminer

- d'une part la probabilité que la population survive :

$$\mathbb{P}(\tau_y > n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ???,$$

- et d'autre part la loi du nombre de grenouilles sachant que la population a survécue :

$$\mathscr{L}\left(\frac{y+S_n}{\sigma\sqrt{n}} \,\middle|\, \tau_y > n \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ???.$$

Théorèmes limites pour une marche ~~Markovienne~~ conditionnée à rester positive, cas indépendant

On suppose les accroissements $(X_n)_{n \geqslant 1}$ i.i.d. avec un moment d'ordre 2 :

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) < +\infty.$$

On suppose également la marche sans dérive :

$$\mathbb{E}(X_1) = 0.$$

Théorèmes limites pour une marche ~~Markovienne~~ conditionnée à rester positive, cas indépendant

On suppose les accroissements $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. avec un moment d'ordre 2 :

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) < +\infty.$$

On suppose également la marche sans dérive :

$$\mathbb{E}(X_1) = 0.$$

Théorème (temps de sortie) [Spitzer, 1960]

Pour tout $y > 0$, il existe une constante $V(y) > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(\tau_y > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2V(y)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$$

Théorème (loi limite de la marche conditionnée) [Iglehart, 1974]

Pour tout $y > 0$ et $t > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{y+S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y > n\right) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{(loi de Rayleigh).}$$

Théorèmes limites pour une marche Markovienne conditionnée à rester positive

Le nombre de départs et d'arrivées des grenouilles l'année $n+1$ dépend de celui de l'année n de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = a_{n+1} X_n + b_{n+1},$$

où les $(a_i, b_i)_{i \geqslant 1}$ sont i.i.d.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et
$y + S_n = y + X_1 + \cdots + X_n$ est alors une marche Markovienne.

On notera $x \in \mathbb{R}$ le point de départ de cette chaîne de Markov et $\mathbb{P}_x$ (resp. $\mathbb{E}_x$) la probabilité (resp. l'espérance) sachant

$$X_0 = x \quad p.s.$$

La récursion stochastique

On suppose notamment les hypothèses suivantes,

Condition 1 : contraction de la dépendance et centrage

- Il existe $\alpha > 2$ tel que
$$\mathbb{E}\left(|a|^{\alpha}\right) < 1 \qquad \mathbb{E}\left(|b|^{\alpha}\right) < +\infty.$$
- De plus
$$\mathbb{E}(b) = 0.$$

Alors la chaîne de Markov

$$X_n = \prod_{i=1}^{n} a_i x + \sum_{k=1}^{n} b_k \prod_{i=k+1}^{n} a_i,$$

possède une unique mesure invariante ν de loi celle de

$$Z = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \prod_{i=1}^{k-1} a_i.$$

La récursion stochastique

On suppose notamment les hypothèses suivantes,

Condition 1 : contraction de la dépendance et centrage

- Il existe $\alpha > 2$ tel que

$$\mathbb{E}\left(|a|^{\alpha}\right) < 1 \qquad \mathbb{E}\left(|b|^{\alpha}\right) < +\infty.$$

- De plus

$$\mathbb{E}(b) = 0.$$

La loi ν est centrée et admet des moments d'ordre $\alpha > 2$:

$$\int_{\mathbb{R}} x\nu(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \prod_{i=1}^{k-1} a_i\right) = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^{\alpha}\,\nu(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \prod_{i=1}^{k-1} a_i\right|^{\alpha}\right) < \infty$$

La marche Markovienne non conditionnée

Théorème (loi limite de la marche) [Guivarc'h, Le Page, 2008]

La marche Markovienne issue de la récursion stochastique renormalisée converge en loi vers la loi normale centrée réduite :
il existe $\sigma > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x \left(\frac{y + S_n}{\sigma \sqrt{n}} \leqslant t \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2} \, ds.$$

La marche Markovienne non conditionnée

Théorème (loi limite de la marche) [Guivarc'h, Le Page, 2008]

La marche Markovienne issue de la récursion stochastique renormalisée converge en loi vers la loi normale centrée réduite :
il existe $\sigma > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x \left(\frac{y + S_n}{\sigma \sqrt{n}} \leqslant t \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2} \, ds.$$

- $\mathbb{P}\left(\tau_y > n\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ???$,
- $\mathscr{L}\left(\frac{y+S_n}{\sigma\sqrt{n}} \,\middle|\, \tau_y > n \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ???$.

1. Introduction
   - De quoi parle-t-on ?
   - Un modèle Markovien : la récursion stochastique

2. Existence d'une fonction harmonique
   - Motivation
   - Résultat
   - Idées de la preuve

3. Les théorèmes limites
   - L'exemple brownien
   - Résultats

Une fonction harmonique pour positiver

- La suite $(X_n, y + S_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov. Notons $\mathbf{Q}(x, y, .)$ son noyau : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\forall (A, B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^2$,

$$\mathbf{Q}(x, y, A \times B) = \mathbb{P}_x \left(X_1 \in A, y + S_1 \in B \right).$$

- Afin de ne considérer que les trajectoires positives, on définit la restriction de $\mathbf{Q}(x, y, .)$ aux ensembles mesurables de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

$$\mathbf{Q}_+(x, y, .) := \mathbf{Q}(x, y, .)|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*}.$$

- Cette mesure n'étant plus une probabilité, $\mathbf{Q}_+(x, y, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) < 1$, on souhaite renormaliser $\mathbf{Q}_+$.

Une fonction harmonique pour positiver

Définition

On dit qu'une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_+ V(x,y) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbf{Q}_+(x,y,\mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y') \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbb{P}_x\left(X_1 \in \mathrm{d}x'\,;\, y + S_1 \in \mathrm{d}y'\right) \\ &= V(x,y).\end{aligned}$$

Si de plus l'on suppose $V > 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on définit $\overline{\mathbf{Q}}_+(x,y,.)$ par, pour tout B Borélien de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{Q}}_+(x,y,B) &:= \frac{1}{V(x,y)}(\mathbf{Q}_+ V)(x,y,B) \\ &= \frac{1}{V(x,y)}\int_B V(x',y')\mathbf{Q}_+(x,y,\mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y').\end{aligned}$$

Une fonction harmonique pour positiver

Définition

On dit qu'une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_+ V(x,y) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbf{Q}_+(x,y,\mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y') \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbb{P}_x\left(X_1 \in \mathrm{d}x' \,;\, y + S_1 \in \mathrm{d}y'\right) \\ &= V(x,y). \end{aligned}$$

L'opérateur $\overline{\mathbf{Q}}_+$ est alors bien un noyau Markovien,

$$\overline{\mathbf{Q}}_+(x,y,\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*) = \frac{1}{V(x,y)} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*} V(x',y')\mathbf{Q}_+(x,y,\mathrm{d}x' \times \mathrm{d}y') = 1.$$

Un volontaire pour être harmonique ?

Définition

On dit qu'une fonction $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est harmonique si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_+ V(x,y) &= \mathbb{E}_x\left(V(X_1, y + S_1)\,;\; y + S_1 > 0\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left(V(X_1, y + S_1)\,;\; \tau_y > 1\right) \\ &= V(x,y). \end{aligned}$$

Considérons

$$V_n(x,y) = \mathbb{E}_x\left(y + S_n\,;\, \tau_y > n\right).$$

Par la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x,y) &= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_x\left(y + S_{n+1}\,;\, \tau_y > n+1 \mid F_1\right)\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left(V_n\left(X_1, y + S_1\right)\,;\, \tau_y > 1\right). \end{aligned}$$

Existence d'une fonction harmonique

Théorème (Existence d'une fonction harmonique)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$, la limite suivante existe et est finie,
$$V(x,y) := \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x \left(y + S_n \,;\, \tau_y > n \right) < +\infty.$$
2. La fonction V est $\mathbf{Q}_+$-harmonique.
3. La fonction V est strictement positive sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Considérons
$$V_n(x,y) = \mathbb{E}_x \left(y + S_n \,;\, \tau_y > n \right).$$

Par la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x,y) &= \mathbb{E}_x \left(\mathbb{E}_x \left(y + S_{n+1} \,;\, \tau_y > n+1 \mid F_1 \right)\right) \\ &= \mathbb{E}_x \left(V_n \left(X_1, y + S_1 \right) \,;\, \tau_y > 1 \right). \end{aligned}$$

Etape 1 : approximation par une martingale

En notant $z := y + \frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)}x$, on décompose $y + S_n$ de la façon suivante :

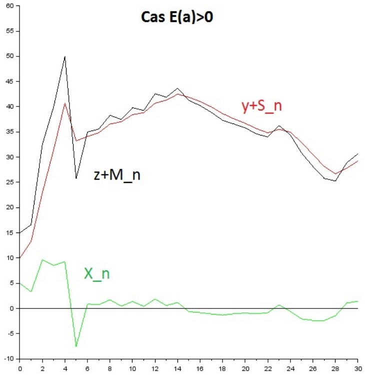
$$y + S_n = \underbrace{y + S_n + \frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)}X_n}_{=:z+M_n} - \underbrace{\frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)}X_n}_{= \text{ terme reste}} .$$

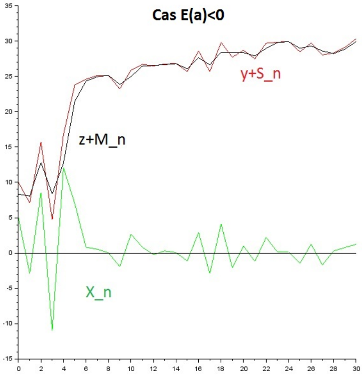
Lemme 1

- Le processus $(z + M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale de moyenne z.
- Sous réserve que l'une des deux limites existe,

$$V(x,y) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x\left(z + M_n \,;\, \tau_y > n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x\left(y + S_n \,;\, \tau_y > n\right).$$

Etape 1 : approximation par une martingale





$$X_{n+1} = a_{n+1}X_n + b_{n+1}, \quad y + S_n = y + X_1 + \cdots + X_n$$

$$z + M_n = y + S_n + \frac{\mathbb{E}(a)}{1 - \mathbb{E}(a)} X_n$$

Etape 2 : un premier majorant d'ordre $n^{1/2-\epsilon}$

Lemme 2

Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0; \epsilon_0[$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, avec $z = y + \mathbb{E}(a)x/(1 - \mathbb{E}(a))$, on a

$$\mathbb{E}_x \left(z + M_n \, ; \, \tau_y > n\right) \leqslant z + c\,|x| + cn^{1/2-2\epsilon}.$$

Idée de la preuve :
Par un petit calcul, en utilisant la propriété de martingale, on se ramène au temps de sortie τ_y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left(z + M_n \, ; \, \tau_y > n\right) &= \mathbb{E}_x \left(z + M_n\right) - \mathbb{E}_x \left(z + M_n \, ; \, \tau_y \leqslant n\right) \\
&= z - \mathbb{E}_x \left(\mathbb{E}\left(z + M_n \, ; \, \tau_y \leqslant n \,\middle|\, \mathscr{F}_{\tau_y}\right)\right) \\
&= z - \mathbb{E}_x \left(z + M_{\tau_y} \, ; \, \tau_y \leqslant n\right).
\end{aligned}$$

Etape 2 : un premier majorant d'ordre $n^{1/2-\epsilon}$

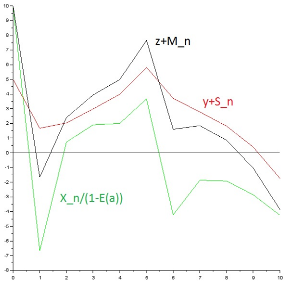
Lemme 2

Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0; \epsilon_0[$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x \left(z + M_n \, ; \, \tau_y > n \right) \leqslant z + c\,|x| + cn^{1/2-2\epsilon}.$$

Au temps τ_y, nous avons,

$$\begin{aligned} z + M_{\tau_y} &= y + S_{\tau_y} + \frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)} X_{\tau_y} < 0 \\ &= y + S_{\tau_y - 1} + \frac{1}{1-\mathbb{E}(a)} X_{\tau_y} > \frac{1}{1-\mathbb{E}(a)} X_{\tau_y}. \end{aligned}$$



Etape 2 : un premier majorant d'ordre $n^{1/2-\epsilon}$

Lemme 2

Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0; \epsilon_0[$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right) \leqslant z + c\left|x\right| + cn^{1/2-2\epsilon}.$$

Idée de la preuve :
Par un petit calcul, en utilisant la propriété de martingale, on se ramène au temps de sortie τ_y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right) &= \mathbb{E}_x\left(z + M_n\right) - \mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y \leqslant n\right) \\
&= z - \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}\left(z + M_n\,;\, \tau_y \leqslant n \,\middle|\, \mathscr{F}_{\tau_y}\right)\right) \\
&= z - \mathbb{E}_x\left(z + M_{\tau_y}\,;\, \tau_y \leqslant n\right) \\
&\leqslant z + \mathbb{E}_x\left(\left|X_{\tau_y}\right|\,;\, \tau_y \leqslant n\right).
\end{aligned}$$

Etape 3 : un majorant uniforme

Lemme 2

Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0; \epsilon_0[$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x \left(z + M_n \,;\, \tau_y > n \right) \leqslant z + c \left| x \right| + c n^{1/2-2\epsilon}.$$

- Si $z = y + \frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)} x > n^{1/2-\epsilon}$, alors immédiatement,

$$\mathbb{E}_x \left(z + M_n \,;\, \tau_y > n \right) \leqslant 2z + c \left| x \right|.$$

- Si $z \leqslant n^{1/2-\epsilon}$ on attend que $z + M_n$ devienne plus grand que $n^{1/2-\epsilon}$.

Etape 3 : un majorant uniforme

Lemme 2

Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0; \epsilon_0[$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right) \leqslant z + c\,|x| + cn^{1/2-2\epsilon}.$$

- Si $z = y + \frac{\mathbb{E}(a)}{1-\mathbb{E}(a)}x > n^{1/2-\epsilon}$, alors immédiatement,
$$\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right) \leqslant 2z + c\,|x|\,.$$
- Si $z \leqslant n^{1/2-\epsilon}$ on attend que $z + M_n$ devienne plus grand que $n^{1/2-\epsilon}$.

Proposition

Pour tout $p \in]2; \alpha[$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x\left(z + M_n\,;\, \tau_y > n\right) \leqslant c_p\left(1 + y + |x|\right)\left(1 + |x|\right)^{p-1}.$$

Conclusion de l'existence

Théorème (Existence d'une fonction harmonique)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$, la limite suivante existe et est finie,

$$\begin{aligned} V(x,y) &:= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x \left(y + S_n \,;\, \tau_y > n \right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_x \left(z + M_n \,;\, \tau_y > n \right) < +\infty. \end{aligned}$$

2. La fonction V est $\mathbf{Q}_+$-harmonique.
3. La fonction V est strictement positive sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

L'exemple brownien

On pose

$$\tau_y^{bm} = \min\{t \geqslant 0,\ y + \sigma B_t \leqslant 0\},$$

Proposition (temps de sortie) [Lévy, 1954]

Pour tout $y > 0$ et $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}\left(\tau_y^{bm} > n\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n \sigma}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2n\sigma^2}}\,dt.$$

Notamment,

$$\mathbb{P}\left(\tau_y^{bm} > n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2y}{\sqrt{2\pi n \sigma}}.$$

L'exemple brownien

On pose

$$\tau_y^{bm} = \min\{t \geqslant 0,\ y + \sigma B_t \leqslant 0\},$$

Proposition (loi limite conditionnelle) [Lévy, 1954]

Pour tout $y > 0$, $n \geqslant 1$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{y + \sigma B_n}{\sqrt{n}} \leqslant t\,;\, \tau_y^{bm} > n\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \int_0^{t\sqrt{n}} e^{-\frac{(s-y)^2}{2n\sigma^2}} - e^{-\frac{(s+y)^2}{2n\sigma^2}}\, ds.$$

Notamment,

$$\mathbb{P}\left(\frac{y + \sigma B_n}{\sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y^{bm} > n\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Approximation de la marche par le mouvement Brownien

Théorème [Grama, Le Page, Peigné, 2014]

Pour tout $p \in]2;\alpha[$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}_x \left(\sup_{1 \geqslant k \geqslant n} |S_k - \sigma B_k| > n^{1/2-\epsilon} \right) \leqslant \frac{c_{p,\epsilon} \left(1 + |x|^p\right)}{n^\epsilon}.$$

- A nouveau lorsque le point de départ $y > n^{1/2-\epsilon}$, on est capable d'approcher la marche par le Brownien.
- Lorsque y est quelconque, on se place par la propriété de Markov au temps
$$\nu_n := \min\{k \geqslant 1, \ |y + S_k| > n^{1/2-\epsilon}\}.$$

La difficulté du cas Markovien

$$\nu_n := \min\{k \geqslant 1,\ |y + S_k| > n^{1/2-\epsilon}\}$$

Par la propriété de Markov,

$$\mathbb{E}_x\left(y + S_n\,;\,\tau_y > n\right)$$
$$\leqslant \mathbb{E}_x\left(y + S_n\,;\,\tau_y > n\,,\,\nu_n \leqslant n^{1-\epsilon}\right) + \frac{c_p(x,y)}{n^{\epsilon}}$$
$$= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_{x'=X_{\nu_n}}\left(y' + S_{n-\nu_n}\,;\,\tau_{y'} > n-\nu_n\right)\,,\,\nu_n \leqslant n^{1-\epsilon}\right) + \frac{c_p(x,y)}{n^{\epsilon}}.$$

- Problème : lorsque les accroissements sont markoviens, un terme reste en X_{ν_n} n'admet pas de majorant simple a priori.
- Astuce : exploiter la décroissance exponentielle de la dépendance dans le passé de la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_x\left(|X_n|\right) = \mathbb{E}_x\left(\left|\prod_{i=1}^{n} a_i x + \sum_{k=1}^{n} b_k \prod_{i=k+1}^{n} a_i\right|\right)$$
$$\leqslant \mathbb{E}(a)^n x + c = e^{-cn} x + c.$$

Asymptotique du temps de sortie

Théorème (temps de sortie)

Il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$,

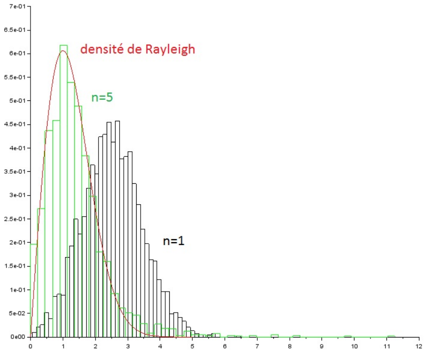
$$\mathbb{P}_x(\tau_y > n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2V(x,y)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}.$$

Loi asymptotique de la marche conditionnée

Théorème (loi limite de la marche conditionnée)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y > 0$ et tout $t > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_x \left(\frac{y + S_n}{\sigma \sqrt{n}} \leqslant t \,\middle|\, \tau_y > n \right) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{(loi de Rayleigh).}$$



IGLEHART, D. (1974). Functional Central Limit Theorems for Random Walks Conditioned to Stay Positive. The Annals of Probability.

DENISOV, D. AND WACHTEL, V. (2010). Conditional limit theorems for ordered random walks. Electron. J. Probab.

GUIVARC'H, Y. AND LE PAGE, E. (2008). On spectral properties of a family of transfer operators and convergence to stable laws for affine random walks. Ergodic Theory and Dynamical Systems.

GRAMA, I., LE PAGE, E. AND PEIGNÉ, M. (2014). On the rate of convergence in the weak invariance principle for dependant random variables with applications to Markov chains. Colloquim Mathematicum.

Perspectives

- Travailler la dimension supérieure, avec A_{n+1} et B_{n+1} des matrices aléatoires,

$$X_{n+1} = A_{n+1} X_n + B_{n+1}.$$

- Théorème fonctionnel, type Donsker : l'interpolation de la marche ramenée à l'intervalle $[0,1]$, $\mathbf{S}_n(t) = \frac{y+S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}$, converge en loi vers le méandre brownien.

- Généraliser à toutes chaînes de Markov possédant une décroissance exponentielle en moyenne,

$$\mathbb{E}_x\left(|f(X_n)|\right) \leqslant \mathrm{e}^{-cn} N(x) + c.$$

Merci !